

САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР®

# ОТВЕТЫ и РЕШЕНИЯ

10-11

К заданиям учебника  
**А.Н. Колмогорова,**  
**А. М. Абрамова и др.**

**Алгебра**  
и начала анализа

**САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР®**

**А. Н. РУРУКИН**

**ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР ЗАДАНИЙ  
ИЗ УЧЕБНИКА  
ПО АЛГЕБРЕ  
И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА**

**авторов:**

**А.Н. Колмогорова и др.  
(М.: Просвещение)**

**10–11  
классы**

**МОСКВА • «БАКО» • 2008**

УДК 337:167.1 [512+517]

ББК 22.14я72

Р87

**Рурукин А.Н.**

**Р87**      Подробный разбор заданий из учебника по алгебре и началам анализа авторов А.Н. Колмогорова и др. для 10–11 классов. – М.: ВАКО, 2008. – 288 с. – (Сам себе репетитор).

ISBN 978-5-94665-745-7

Пособие содержит профессиональный подробный разбор заданий из учебника по Алгебре и началам анализа авторов А.Н. Колмогорова и др. для 10–11 классов. Приводятся также алгоритмы решения типовых задач. Ответы и решения разбиты по тематическим разделам в соответствии с логикой учебника.

Автор пособия – кандидат физико-математических наук, преподаватель с 25-летним стажем педагогической деятельности.

УДК 337:167.1 [512+517]

ББК 22.14я72

---

*Учебно-методическое издание*

***САМ СЕБЕ РЕПЕТИТОР***\*

**Рурукин Александр Николаевич**

**Подробный разбор заданий из учебника  
ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА**

**авторов: А.Н. Колмогорова и др.**

**10–11 классы**

Налоговая льгота —

Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.

Издательство «ВАКО»

Подписано к печати с диапозитивов 25.03.2008.

Формат 70×100/32. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. листов 9. Тираж 10 000 экз. Заказ № 26182.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат»  
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. [www.sarpk.ru](http://www.sarpk.ru)

ISBN 978-5-94665-745-7

© ООО «ВАКО», 2008

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Глава I. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Тригонометрические функции числ. вого аргумента .....	4
§ 2. Основные свойства функций .....	12
§ 3. Решение тригонометрических уравнений и неравенств .....	36

## Глава II. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 4. Производная .....	54
§ 5. Применения непрерывности и производной .....	69
§ 6. Применения производной к исследованию функций .....	80

## Глава III. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

§ 7. Первообразная .....	98
§ 8. Интеграл .....	107

## Глава IV. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§ 9. Обобщение понятия степени .....	117
§ 10. Показательная и логарифмическая функции .....	131
§ 11. Производная показательной и логарифмической функции .....	156

## Глава V. ЗАДАЧИ НА ПОВТОРЕНИЕ

§ 1. Действительные числа .....	165
§ 2. Тожественные преобразования .....	173
§ 3. Функции .....	184
§ 4. Уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств .....	198
§ 5. Производная, первообразная, интеграл и их применения .....	221

## Глава VI. ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

§ 1. Числа и преобразования выражений .....	232
§ 2. Элементарные функции и их свойства .....	241
§ 3. Уравнения, неравенства и системы .....	253
§ 4. Начала анализа .....	275

## Глава I. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

### § 1. Тригонометрические функции числового аргумента

1а) Для перевода градусной меры углов в радианную надо учесть, что  $1^\circ$  составляет  $\frac{\pi}{180}$  радиан. Тогда получаем:  $45^\circ = 45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$ ,  $36^\circ = 36 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$ ,  $180^\circ = 180 \cdot \frac{\pi}{180} = \pi$ . Ответ:  $\frac{\pi}{4}$ ;  $\frac{\pi}{5}$ ;  $\pi$ .

2а) Для перевода радианной меры углов в градусную учтем, что 1 радиан составляет  $\frac{180}{\pi}$  градусов. Тогда получаем:  $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 60^\circ$ ,  $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{180}{\pi} = 90^\circ$ ,  $\frac{5\pi}{36} = \frac{5\pi}{36} \cdot \frac{180}{\pi} = 25^\circ$ . Ответ:  $60^\circ$ ;  $90^\circ$ ;  $25^\circ$ .

3а) Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдем:  $\sin 0 + \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{2\pi}{4} = 0 + 0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ . Ответ:  $\frac{1}{2}$ .

4а) Функции  $\sin \alpha$  и  $\cos \beta$  ограничены, т.е.  $|\sin \alpha| \leq 1$  и  $|\cos \beta| \leq 1$ . Поэтому число  $\alpha$ , для которого  $\sin \alpha = -0,5$  существует. Число  $\beta$ , для которого  $\cos \beta = \sqrt{3}$  не существует, т.к.  $\sqrt{3} \approx 1,7 > 1$ . Функция  $\operatorname{tg} \gamma$  не ограничена. Следовательно, число  $\gamma$ , для которого  $\operatorname{tg} \gamma = -2,5$ , существует. Ответ:  $\alpha, \gamma$  — существуют,  $\beta$  — не существует.

5) Тригонометрические функции  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  связаны основным тригонометрическим тождеством  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ . Проверим выполнение этого равенства для данных значений синуса и косинуса.

а) Если  $\sin \alpha = -\frac{7}{25}$  и  $\cos \alpha = \frac{24}{25}$ , то  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(-\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2 = \frac{49}{625} + \frac{576}{625} = \frac{625}{625} = 1$ . Поэтому такое число  $\alpha$  существует.

Ответ: могут.

в) Если  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$  и  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ , то  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{6}{9} + \frac{5}{9} = \frac{11}{9} \neq 1$ . Поэтому такое число  $\alpha$  не существует.

Ответ: не могут.

6) Функции тангенс и котангенс угла  $\alpha$  связаны соотношением  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ . Проверим выполнение этого равенства для данных значений тангенса и котангенса.

а) Если  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{5}$  и  $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{5}{3}$ , то  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = 1$ .

Поэтому такое число  $\alpha$  существует. Ответ: могут.

в) Если  $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$  и  $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{5}{12}$ , то  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 2,4 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{-12}{12} =$

$-1 \neq 1$ . Поэтому такое число  $\alpha$  не существует. Ответ: не могут.

7а) Сначала найдем  $\cos \alpha$ , используя основное тригонометрическое тождество  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ . Подставив данное значение  $\sin \alpha = -0,8$ , получаем:  $(-0,8)^2 + \cos^2 \alpha = 1$  или  $0,64 + \cos^2 \alpha = 1$ , откуда  $\cos^2 \alpha = 1 - 0,64 = 0,36$ . Учтем, что  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  (третья четверть) и значение  $\cos \alpha$  отрицательно. Поэтому  $\cos \alpha = -\sqrt{0,36} = -0,6$ . Те-

перь найдем  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-0,8}{-0,6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$  и  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{4}$ .

Ответ:  $\cos \alpha = -0,6$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$ ;  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$ .

8а) Для преобразования выражения  $\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha$  используем формулу для разности квадратов чисел и основное тригонометрическое тождество. Получаем:  $\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha + (\sin^2 \alpha)^2 - (\cos^2 \alpha)^2 = \cos^2 \alpha + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$ . Ответ:  $\sin^2 \alpha$ .

8г) Для преобразования данного выражения используем основное тригонометрическое тождество, учтем, что  $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$  и приве-

дем дроби к общему знаменателю. Получаем:  $\frac{\sin^2 t - 1}{\cos^4 t} + \operatorname{tg}^2 t =$

$$= \frac{\sin^2 t - (\sin^2 t + \cos^2 t)}{\cos^4 t} + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{-\cos^2 t}{\cos^4 t} + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{-1}{\cos^2 t} + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} =$$

$$= \frac{-(\sin^2 t + \cos^2 t) + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{-\cos^2 t}{\cos^2 t} = -1. \quad \text{Ответ: } -1.$$

9а) В числителе дроби используем формулу для косинуса суммы двух углов, в знаменателе — для синуса суммы двух углов. Тогда

$$\begin{aligned} \text{получаем: } & \frac{\cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{4\pi}{15} - \sin \frac{4\pi}{15} \sin \frac{\pi}{15}}{\cos 0,3\pi \sin 0,2\pi + \sin 0,3\pi \cos 0,2\pi} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{15} + \frac{4\pi}{15}\right)}{\sin(0,2\pi + 0,3\pi)} = \frac{\cos \frac{5\pi}{15}}{\sin 0,5\pi} = \\ & = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**9в)** Используем формулу для тангенса суммы двух углов. Имеем:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{10} + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{20}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{10} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{20}} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{10} + \frac{3\pi}{20} \right) = \operatorname{tg} \left( \frac{2\pi}{20} + \frac{3\pi}{20} \right) = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{20} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

**Ответ:** 1.

**10а)** Для угла  $\alpha$  найдем  $\cos \alpha$ , используя основное тригонометрическое тождество. При этом учтем, что  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  (вторая четверть)

и значение  $\cos \alpha$  отрицательно:  $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$ . Для угла  $\beta$  найдем  $\sin \beta$ . Учтем, что

$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$  (вторая четверть) и значение  $\sin \beta$  положительно:  $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$ . Итак, имеем:

$\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$  и  $\sin \beta = \frac{12}{13}$ ,  $\cos \beta = -\frac{5}{13}$ . Теперь легко вычислить, используя формулы двойного аргумента и формулу для синуса разности углов и формулу для косинуса суммы углов. Тогда получаем:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25};$$

$$\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \left(-\frac{5}{13}\right)^2 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169} - \frac{144}{169} = -\frac{119}{169};$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{12}{13} = -\frac{20}{65} + \frac{36}{65} = \frac{16}{65};$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) - \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} = \frac{15}{65} - \frac{48}{65} = -\frac{33}{65}.$$

**Ответ:**  $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$ ,  $\cos 2\beta = -\frac{119}{169}$ ;  $\sin(\alpha - \beta) = \frac{16}{65}$ ,  $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{33}{65}$ .

**11а)** Используем формулы для синуса и косинуса разности двух углов. Получаем:

$$\frac{2 \sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta} = \frac{2 \sin \alpha \cos \beta - (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta} =$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta). \quad \text{Ответ: } \operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

**11в)** Используем формулы для косинуса и синуса суммы двух углов и значения синуса и косинуса угла  $\frac{\pi}{4}$ . Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sqrt{2} \sin \alpha} &= \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2\left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha\right)}{2\left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha\right) - \sqrt{2} \sin \alpha} = \\ &= \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha\right)}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha\right) - \sqrt{2} \sin \alpha} = \frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{\sqrt{2} \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Ответ:  $\operatorname{tg} \alpha$ .

**12а)** Для нахождения значений тригонометрических функций используем формулы приведения и понятие четности и нечетности функций. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \sin \frac{7\pi}{8} &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \sin \frac{\pi}{8}; \quad \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \cos \frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3}; \\ \operatorname{tg}(0,6\pi) &= \operatorname{tg}(0,5\pi + 0,1\pi) = -\operatorname{ctg}(0,1\pi); \quad \operatorname{ctg}(-1,2\pi) = \operatorname{ctg}(-\pi - 0,2\pi) = \\ &= \operatorname{ctg}(-0,2\pi) = -\operatorname{ctg}(0,2\pi). \end{aligned}$$

Ответ:  $\sin \frac{\pi}{8}; \cos \frac{\pi}{3}; -\operatorname{ctg}(0,1\pi); -\operatorname{ctg}(0,2\pi)$ .

**13а)** Для вычисления данного выражения используем формулы приведения и таблицу значений тригонометрических функций. Получаем:

$$\begin{aligned} 8 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{2\pi}{3} \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4} &= 8 \sin \frac{\pi}{6} \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \times \\ &\times \operatorname{ctg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 8 \sin \frac{\pi}{6} \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right) \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 8 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} \times \\ &\times \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ответ:  $2\sqrt{3}$ .

**14а)** Преобразуем левую часть данного равенства, используя формулу для разности синусов углов:  $\sin \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} = 2 \sin \frac{\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{12}}{2} \times$   
 $\times \cos \frac{\frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{12}}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Следовательно, равенство верно. Ответ: верно.

**15а)** Так как  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , то разделив на 2 все части этого неравенства, получим неравенство того же знака  $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$  (т.е. угол  $\frac{\alpha}{2}$  находится во второй четверти). Поэтому  $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$ ,  $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$  и  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} < 0$ . Используем формулы половинного аргумента. Получаем:

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)}{2} = \frac{25}{26} \quad \text{и} \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}; \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \\ &= \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{1 - \frac{12}{13}}{2} = \frac{1}{26} \quad \text{и} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1}{26}} = -\frac{1}{\sqrt{26}}. \quad \text{Тогда} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{5}{\sqrt{26}} : \left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right) = -5. \quad \text{Ответ: } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{\sqrt{26}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sqrt{26}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -5. \end{aligned}$$

**18б)** Длина дуги  $l$  в  $\alpha$  радиан окружности радиуса  $r$  равна  $l = \alpha r$ . Подставим данные величины  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$  и  $r = 6$  см и получим  $l = \frac{3\pi}{4} \cdot 6 = \frac{18}{4}\pi = 4,5\pi$  (см). Ответ:  $4,5\pi$  (см).

**19б)** Площадь  $S$  сектора круга  $r$ , дуга которого содержит  $\alpha$  радиан равна  $S = \frac{\alpha r^2}{2}$ . Подставим данные величины  $\alpha = \frac{5\pi}{3}$  и  $r = 3$  м и получим  $S = \frac{\frac{5\pi}{3} \cdot 3^2}{2} = \frac{5\pi \cdot 9}{2} = \frac{15\pi}{2} = 7,5\pi$  (м<sup>2</sup>). Ответ:  $7,5\pi$  (м<sup>2</sup>).

**21в)** Для нахождения значения выражения, подставим в него величину  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ . Получаем:  $4 \cos\left(3\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) =$

$$= 4 \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}\right) = 4 \cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 3.$$

Ответ: 3.

**22б)** Для вычисления значения выражения  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$  разделим его числитель и знаменатель почленно на  $\cos \alpha$ . Имеем:

$$\frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha - 1}. \quad \text{Теперь подставим данное значение } \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{4}.$$

$$\text{Получаем: } \frac{5/4 + 1}{5/4 - 1} = \frac{9/4}{1/4} = 9. \quad \text{Ответ: } 9.$$

**22г)** Так как известно, что  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = 0,5$ , то в данном выражении  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta$  выделим эту величину, используя основное тригонометрическое тождество. Получаем:  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta = (1 - \cos^2 \alpha) - (1 - \sin^2 \beta) = 1 - \cos^2 \alpha - 1 + \sin^2 \beta = -\cos^2 \alpha + \sin^2 \beta = -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta) = -0,5$ . Ответ:  $-0,5$ .

**23б)** Используем формулу половинного аргумента  $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$ . Тогда получаем:  $\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}} - \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right|} - \left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = 2 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 2 \operatorname{ctg} \alpha$ .

Было учтено, что  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Тогда  $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$  и  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} > 0$ . Поэтому  $\left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ . Также была учтена формула для тангенса двойного аргумента. Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, равенство доказано. Ответ: доказано.

**23г)** Для доказательства данного равенства преобразуем его левую и правую части, используя основное тригонометрическое тождество. Для левой части получаем:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} &= \sqrt{\sin^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \sqrt{\sin^2 \alpha \left( 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right)} = \\ &= \sqrt{\sin^2 \alpha \cdot \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha} = |\operatorname{tg} \alpha| = \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Для правой части имеем:  $\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)}} =$   
 $= \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha \left( 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right)}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha} =$   
 $= |\operatorname{tg} \alpha| = \operatorname{tg} \alpha$ . Учтено, что  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  и  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ . Поэтому  $|\operatorname{tg} \alpha| = \operatorname{tg} \alpha$ . Так как левая часть равна правой, то равенство доказано.

Ответ: доказано.

**24б)** Используем формулы для тангенса суммы и разности углов и преобразуем левую часть тождества. Получаем:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} + \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}} + \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}} =$$

$= 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + 1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 2$ . Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано. Ответ: доказано.

**25а)** Преобразуем левую часть тождества, используя формулы для синуса и косинуса двойного аргумента. Получаем:  $(\sin^2 t + 2 \sin t \cos t - \cos^2 t)^2 = ((2 \sin t \cos t) - (\cos^2 t - \sin^2 t))^2 = (\sin 2t - \cos 2t)^2 = \sin^2 2t - 2 \sin 2t \cos 2t + \cos^2 2t = (\sin^2 2t + \cos^2 2t) - 2 \sin 2t \cos 2t = 1 - \sin 4t$ . Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано. Ответ: доказано.

**25б)** Преобразуем левую часть тождества. Для этого в числителе и знаменателе дроби сгруппируем члены и преобразуем разность тригонометрических функций в произведение. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha - 2 \sin 3\alpha - \cos 5\alpha}{\sin 5\alpha - 2 \cos 3\alpha - \sin \alpha} &= \frac{(\cos \alpha - \cos 5\alpha) - 2 \sin 3\alpha}{(\sin 5\alpha - \sin \alpha) - 2 \cos 3\alpha} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{5\alpha - \alpha}{2} \sin \frac{\alpha + 5\alpha}{2} - 2 \sin 3\alpha}{2 \sin \frac{5\alpha - \alpha}{2} \cos \frac{5\alpha + \alpha}{2} - 2 \cos 3\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha \sin 3\alpha - 2 \sin 3\alpha}{2 \sin 2\alpha \cos 3\alpha - 2 \cos 3\alpha} = \\ &= \frac{2 \sin 3\alpha (\sin 2\alpha - 1)}{2 \cos 3\alpha (\sin 2\alpha - 1)} = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha. \end{aligned}$$

Так как левая часть равна правой, то тождество доказано.

Ответ: доказано.

**26а)** Для доказательства тождества  $\cos t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}$  преобразуем левую часть, используя формулы половинного аргумента и основное тригонометрическое тождество:  $\cos t = \frac{\cos t}{1} = \frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}}$ .

Разделим почленно числитель и знаменатель этой дроби на  $\cos^2 \frac{t}{2}$ :

$$\frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}. \text{ Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано. } \underline{\text{Ответ:}} \text{ доказано.}$$

**27а)** Используем формулу для синуса двойного аргумента и получим:  $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \cdot \left( 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ .

Ответ:  $\frac{1}{4}$ .

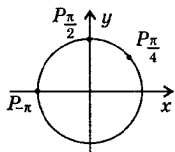
**27б)** Преобразуем разность синусов двух углов в произведение и

$$\begin{aligned} \text{получим: } \left( \sin \frac{7\pi}{18} - \sin \frac{\pi}{18} \right) : \cos \frac{2\pi}{9} &= 2 \sin \frac{7\pi - \pi}{2 \cdot 18} \cos \frac{7\pi + \pi}{2} : \cos \frac{2\pi}{9} = \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{2\pi}{9} : \cos \frac{2\pi}{9} = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1. \quad \text{Ответ: } 1. \end{aligned}$$

**29а)** Изобразим данные точки  $P_\alpha$  единичной окружности и оп-

ределим их координаты:  $P_{\frac{\pi}{2}}(0; 1)$ ,  $P_{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  и  $P_{-\pi}(-1; 0)$ , учитывая, что  $x = \cos \alpha$  и  $y = \sin \alpha$ .

Ответ:  $P_{\frac{\pi}{2}}(0; 1)$ ,  $P_{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $P_{-\pi}(-1; 0)$ .



**31а)** Используя формулы приведения, преобразуем данное выражение:

$$\begin{aligned} \sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{9\pi}{8} \operatorname{tg} 2,3\pi &= \sin \frac{3\pi}{7} \cos \left( \pi + \frac{\pi}{8} \right) \operatorname{tg} (2\pi + 0,3\pi) = \sin \frac{3\pi}{7} \left( -\cos \frac{\pi}{8} \right) \times \\ &\times \operatorname{tg} (0,3\pi) = -\sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{8} \operatorname{tg} (0,3\pi). \end{aligned}$$

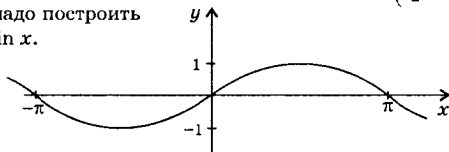
Очевидно, что все углы  $\frac{3\pi}{7}$ ,  $\frac{\pi}{8}$  и  $0,3\pi$  находятся в первой четверти, в которой все тригонометрические функции положительны. Поэтому произведение трех тригонометрических функций положительно. Перед этим произведением стоит знак минус. Следовательно, данное число имеет знак минус.

Ответ: минус.

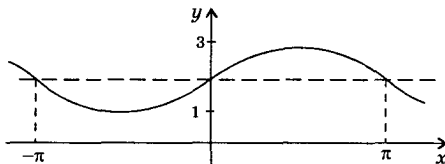
**33а)** Используем формулу приведения и получим  $y = \cos \left( \frac{3\pi}{2} + \right.$

$\left. + x \right) = \sin x$ . Поэтому надо построить график функции  $y = \sin x$ .

Ответ: см. график.



**36а)** Функция  $\sin x$  определена при всех значениях  $x$ . Следовательно, область определения функции  $y = 2 + \sin x$   $D(y) = R$ . Для нахождения области значений данной функции учтем ограниченность функции синус, т.е.  $-1 \leq \sin x \leq 1$ . Ко всем частям этого двойного неравенства прибавим число 2 и получим:  $-1 + 2 \leq \sin x + 2 \leq 1 + 2$  или  $1 \leq y \leq 3$ . Поэтому область значений данной функции  $E(y) = [1; 3]$ . Чтобы построить график функции  $y(x)$ , надо график функции  $\sin x$  сдвинуть вверх на две единицы.



Ответ:  $D(y) = R$ ,  $E(y) = [1; 3]$ .

**386)** Для функции  $y = 1 + \cos x$  сначала найдем точку пересечения с осью ординат. Для этого в уравнение функции подставим значение  $x = 0$  и получим  $y = 1 + \cos 0 = 1 + 1 = 2$ . Поэтому такая точка имеет координаты  $(0; 2)$ . Для нахождения точек пересечения графика данной функции с осью абсцисс подставим в уравнение функции  $y = 0$  и решим полученное уравнение:  $0 = 1 + \cos x$  или  $\cos x = -1$ . Решения этого уравнения  $x = \pi + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Следовательно, координаты таких точек пересечения  $(\pi + 2\pi n; 0)$ .

Ответ:  $(0; 2)$ ,  $(\pi + 2\pi n; 0)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

## § 2. Основные свойства функций

**40)** Чтобы найти значение функции  $f(x)$  в данной точке  $x = x_0$ , надо поставить значение  $x_0$  вместо  $x$  в уравнение функции и вычислить число  $f(x_0)$ .

а) Для функции  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  получаем: в точке  $x = -1$ :  $f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -1 - 1 = -2$ ; в точке  $x = \frac{1}{2}$ :  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 = 2,5$ ; в точке  $x = 10$ :  $f(10) = 10 + \frac{1}{10} = 10,1$ . Ответ:  $-2; 2,5; 10,1$ .

б) Для функции  $f(x) = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  получаем: в точке  $x = -\frac{\pi}{4}$ :  $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3\cos\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 3\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\frac{\pi}{2} = 3 \cdot 0 = 0$ ; в точке  $x = 0$ :  $f(0) = 3\cos\left(0 - \frac{\pi}{4}\right) = 3\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3\cos\frac{\pi}{4} = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ; в точке  $x = \pi$ :  $f(\pi) = 3\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -3\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ . Ответ:  $0; \frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .

**41а)** Чтобы записать значение функции  $f(x) = x^2 + 2x$  в данной точке  $x$ , надо подставить значение  $x$  в уравнение функции. Поэтому получаем: в точке  $x_0$ :  $f(x_0) = x_0^2 + 2x_0$ , в точке  $t + 1$ :  $f(t + 1) = (t + 1)^2 + 2(t + 1) = t^2 + 2t + 1 + 2t + 2 = t^2 + 4t + 3$ .

Ответ:  $f(x_0) = x_0^2 + 2x_0$ ,  $f(t + 1) = t^2 + 4t + 3$ .

**42)** На рисунках 26а, з изображены графики функций, т.к. каждому значению  $x$  соответствует только одно значение  $y$ . На рисунках 26б, в изображены множества точек, которые не являются графиками функций, т.к. существуют такие значения  $x$ , которым соответствует более одного значения  $y$ . Ответ: см. решение.

**43а)** Для функции  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4x+3}$  область определения задается условием  $x^2-4x+3 \neq 0$  (т.к. делить на нуль нельзя), откуда получаем  $x \neq 1$  и  $x \neq 3$ . Следовательно  $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; \infty)$ .

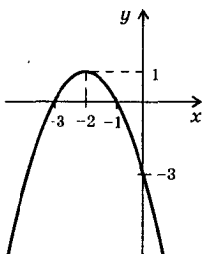
Ответ:  $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; \infty)$ .

**43г)** Для функции  $f(x) = \sqrt{36-x^2}$  область определения задается условием  $36-x^2 \geq 0$  (т.к. квадратный корень можно извлечь только из неотрицательных чисел). Решая это неравенство, получаем:  $-6 \leq x \leq 6$ . Следовательно,  $D(f) = [-6; 6]$ . Ответ:  $D(f) = [-6; 6]$ .

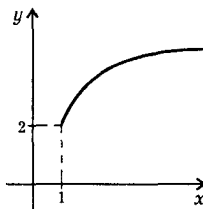
**45г)** Так как функция синус определена при всех значениях  $x$ , то область определения функции  $y = 3 + 0,5 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  — все действительные значения  $x$ , т.е.  $D(y) = R$ . Для нахождения области значений данной функции учтем ограниченность функции синус, т.е.  $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ . Умножим все части этого двойного неравенства на положительное число 0,5. При этом знак неравенства сохраняется:  $-0,5 \leq 0,5 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0,5$ . Ко всем частям неравенства прибавим число 3. Получаем:  $-0,5 + 3 \leq 0,5 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \leq 0,5 + 3$  или  $2,5 \leq y \leq 3,5$ , т.е. область значений данной функции  $E(y) = [2,5; 3,5]$ . Ответ:  $D(y) = R$ ,  $E(y) = [2,5; 3,5]$ .

**46в)** Из рисунка 27в видно, что функция  $y(x)$  разрывна в точках  $x_1 = -1,5$  и  $x_2 = 1,5$ . При этом в точке  $x = 1,5$  функция не определена. Поэтому область определения данной функции  $D(y) = [-6; 1,5) \cup (1,5; 6]$ . Видно, что значение функции  $y = 3$  не достигается. Следовательно, область значений функции  $E(y) = [-3; 3)$ .

Ответ:  $D(y) = [-6; 1,5) \cup (1,5; 6]$ ,  $E(y) = [-3; 3)$ .



**49в)** Для построения графика функции  $y = 1 - (x + 2)^2$  используем приемы преобразования графиков. График данной функции получается из графика функции  $y = -x^2$  его параллельным переносом на 2 единицы влево вдоль оси абсцисс и на 1 единицу вверх вдоль оси ординат. Ответ: см. график.



**50г)** Для построения графика функции  $y = 2 + \sqrt{x - 1}$  используем методы преобразования графиков. График данной функции получается из графика функции  $y = \sqrt{x}$  его параллельным переносом вправо на 1 единицу вдоль оси абсцисс и на 2 единицы вверх вдоль оси ординат. Ответ: см. график.

**51б)** Найдем значения функции  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{если } x \geq -1 \\ 1 - x, & \text{если } x < -1 \end{cases}$  в заданных точках. Так как точка  $-2 < -1$ , то для нахождения значения функции в этой точке пользуемся второй строчкой определения:  $f(-2) = 1 - (-2) = 3$ . Точки  $-1$ ;  $0$ ;  $4$  удовлетворяют условию  $x \geq -1$ . Поэтому для нахождения значений функции в этих точках пользуемся первой строчкой определения. Тогда получаем:  $f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$ ,  $f(0) = 0^2 - 1 = -1$  и  $f(4) = 4^2 - 1 = 15$ .

Ответ:  $f(-2) = 3$ ,  $f(-1) = 0$ ,  $f(0) = -1$ ,  $f(4) = 15$ .

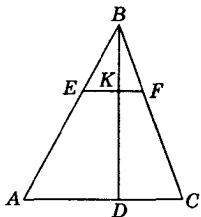
**52а)** Так как  $EF \parallel AC$ , то  $\triangle EBF \sim \triangle ABC$ . Поэтому:  $\frac{EF}{AC} = \frac{BK}{BD}$

или  $\frac{EF}{b} = \frac{x}{h}$ , откуда  $EF = x \frac{b}{h}$ . Выразим площадь  $S_1$  треугольника  $EBF$ :  $S_1 = \frac{1}{2} EF \cdot BK =$

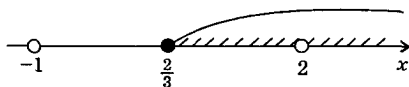
$= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{b}{h} \cdot x = \frac{bx^2}{2h}$ . Тогда площадь  $S_2$  трапеции  $A E F C$  равна:  $S_2 = S_{\triangle ABC} - S_1 = \frac{bh}{2} -$

$-\frac{bx^2}{2h} = \frac{bh^2 - bx^2}{2h} = \frac{b(h^2 - x^2)}{2h}$ .

Ответ:  $S_1 = \frac{bx^2}{2h}$ ,  $S_2 = \frac{b(h^2 - x^2)}{2h}$ .



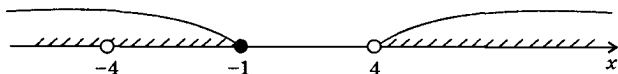
53а) Область определения функции  $y = \frac{\sqrt{3x-2}}{x^2-x-2}$  задается условиями:  $3x-2 \geq 0$  (подкоренное выражение должно быть неотрицательным) и  $x^2-x-2 \neq 0$  (делить на нуль нельзя). Решение линейного неравенства  $x \geq \frac{2}{3}$ . Решение неравенства  $x^2-x-2 \neq 0$  все  $x$ , кроме  $x_1 = -1$  и  $x_2 = 2$ . Изобразим полученные решения на диаграмме.



Видно, что оба неравенства выполняются при  $x \in \left[\frac{2}{3}; 2\right) \cup (2; \infty)$ , что и является областью определения данной функции.

Ответ:  $D(y) = \left[\frac{2}{3}; 2\right) \cup (2; \infty)$ .

53б) Область определения функции  $y = \frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{16-x^2}$  задается условиями:  $x^2-3x-4 \geq 0$  (подкоренное выражение должно быть неотрицательным) и  $16-x^2 \neq 0$  (делить на нуль нельзя). Решение первого неравенства  $x \in (-\infty; -1] \cup [4; \infty)$ . Решение неравенства  $16-x^2 \neq 0$  все  $x$ , кроме  $x_1 = -4$  и  $x_2 = 4$ . Изобразим полученные решения на диаграмме. Видно, что оба неравенства выполняются при



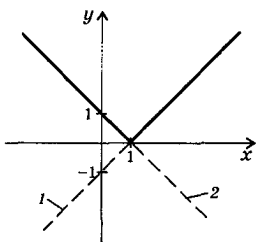
$x \in (-\infty; -4) \cup (-4; -1] \cup (4; \infty)$ , что и является областью определения данной функции.

Ответ:  $D(y) = (-\infty; -4) \cup (-4; -1] \cup (4; \infty)$ .

54в) Область определения функции  $y = \sqrt{x^2+4}$  задается неравенством  $x^2+4 \geq 0$ , которое выполняется при всех значениях  $x$ . Поэтому  $D(y) = R$ . Найдем теперь область значений функции. Очевидно, что  $x^2 \geq 0$ . Прибавим ко всем частям этого неравенства число 4 и получим:  $x^2+4 \geq 4$ . Извлечем квадратный корень из обеих положительных частей неравенства. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем  $\sqrt{x^2+4} \geq \sqrt{4}$  или  $\sqrt{x^2+4} \geq 2$  или  $y \geq 2$ .

Поэтому область значений данной функции  $E(y) = [2; \infty)$ .

Ответ:  $D(y) = R$ ,  $E(y) = [2; \infty)$ .

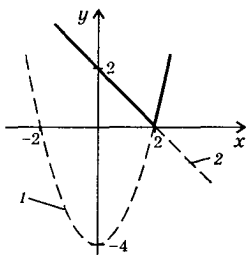


**55а)** Для построения графика функции  $y = |x - 1|$  учтем определение модуля. Тогда получим:

$$y = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1), & \text{если } x - 1 < 0 \end{cases} \quad \text{или}$$

$$y = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x \geq 1 \\ 1 - x, & \text{если } x < 1 \end{cases}.$$

Построим график линейной функции  $y = x - 1$  (прямая 1) и выберем ту его часть, для которой  $x \geq 1$ . Также построим график линейной функции  $y = 1 - x$  (прямая 2) и выберем ту его часть, для которой  $x < 1$ . Объединение двух этих частей и дает график данной функции (сплошная линия). Ответ: см. график.



**55б)** Для построения графика функ-

$$\text{ции } y = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{если } x \geq 2 \\ 2 - x, & \text{если } x < 2 \end{cases} \quad \text{строим гра-}$$

фик  $y = x^2 - 4$  (парабола 1) и выбираем из него ту часть, для которой  $x \geq 2$  (сплошная линия). Также построим график линейной функции  $y = 2 - x$  (прямая 2) и выберем из него ту часть, для которой  $x < 2$  (сплошная линия). Таким образом, график данной функции  $y(x)$

состоит из части прямой и части параболы. Ответ: см. график.

**57а)** Область определения функции  $f(x) = 3x^2 + x^4$  вся числовая прямая, т.е. симметричное множество. Найдем значение  $f(-x) = 3 \cdot (-x)^2 + (-x)^4 = 3x^2 + x^4 = f(x)$ . Видно, что значения функции в симметричных точках  $x$  и  $-x$  одинаковы, т.е.  $f(-x) = f(x)$ . Поэтому данная функция четная (по определению). Ответ: доказано.

**58б)** Область определения функции  $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2 - 1}$  задается условием  $x^2 - 1 \neq 0$  (т.к. делить на нуль нельзя), т.е.  $x \neq \pm 1$ . Поэтому область определения  $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$  — симметричное

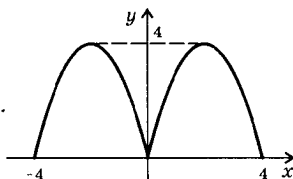
множество. Найдем значение  $f(-x) = \frac{\sin^2(-x)}{(-x)^2 - 1} = \frac{(-\sin x)^2}{x^2 - 1} = \frac{\sin^2 x}{x^2 - 1} = f(x)$ . Было учтено, что функция  $\sin x$  является нечетной, т.е.  $\sin(-x) = -\sin x$ . Видно, что значения функции в симметричных точках  $x$  и  $-x$  одинаковы, т.е.  $f(-x) = f(x)$ . Поэтому данная функция четная (по определению). Ответ: доказано.

**596)** Область определения функции  $f(x) = x^2(2x - x^3)$  — вся числовая ось, т.е. симметричное множество. Найдем значение функции  $f(-x) = (-x)^2 \cdot (2(-x) - (-x)^3) = x^2(-2x + x^3) = -x^2(2x - x^3) = -f(x)$ . Видно, что значения функции в симметричных точках  $x$  и  $-x$  отличаются знаком, т.е.  $f(-x) = -f(x)$ . Следовательно, данная функция нечетная (по определению). Ответ: доказано.

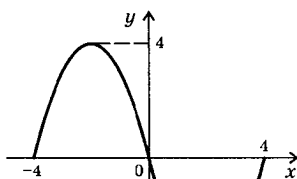
**606)** Область определения функции  $f(x) = \frac{\cos x^3}{x(25 - x^2)}$  задается условием  $x(25 - x^2) \neq 0$  (т.к. делить на ноль нельзя), т.е.  $x \neq 0, \pm 5$ . Поэтому  $D(f) = (-\infty; -5) \cup (-5; 0) \cup (0; 5) \cup (5; \infty)$  — симметричное

множество. Найдем значение функции  $f(-x) = \frac{\cos(-x)^3}{(-x) \cdot (25 - (-x^2))} = \frac{\cos(-x^3)}{(-x)(25 - x^2)} = \frac{\cos(-x^3)}{-x(25 - x^2)} = \frac{\cos x^3}{-x(25 - x^2)} = -\frac{\cos x^3}{x(25 - x^2)} = -f(x)$ . Была учтена четность функции косинус, т.е.  $\cos(-x^3) = \cos x^3$ . Видно, что значения функции в симметричных точках  $x$  и  $-x$  отличаются знаком, т.е.  $f(-x) = -f(x)$ . Следовательно, данная функция нечетная (по определению). Ответ: доказано.

**61а)** На рисунке 37а приведен график функции  $f(x)$ . Если функция  $f(x)$  четная, то ее график симметричен относительно оси ординат (рис. а). Если функция  $f(x)$  нечетная, то ее график симметричен относительно начала координат (рис. б). Эти соображения позволяют легко построить графики функций.



а)



б)

Ответ: см. график.

**62в)** Область определения функции  $f(x) = 3\cos 4x$  — вся числовая ось. Поэтому точки  $x$ ,  $x \pm T$  принадлежат области определения  $D(f)$ . Если функция  $f(x)$  периодическая с периодом  $T$ , то должно выполняться равенство  $f(x + T) = f(x)$ . Для  $T = \frac{\pi}{2}$  проверим это ра-

венство:  $3\cos 4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos(4x + 2\pi) = 4\cos 4x$ , т.к. период функции косинус  $2\pi$ . Таким образом, равенство выполняется. Следовательно, число  $T = \frac{\pi}{2}$  является периодом функции  $f(x) = 3\cos 4x$ .

Ответ: доказано.

**63в)** Докажем, что периодом функции  $f(x) = \sin x + \cos x$  является число  $T = 2\pi$ . Область определения данной функции — вся числовая ось. Поэтому точки  $x, x \pm T$  принадлежат области определения  $D(f)$ . Проверим выполнение равенства  $f(x+T)=f(x)$ . Получаем:  $f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) = \sin x + \cos x = f(x)$ , т.к. функции синус и косинус периодичны с периодом  $2\pi$ . Таким образом, равенство выполняется. Следовательно, функция  $f(x) = \sin x + \cos x$  периодическая с периодом  $T = 2\pi$ . Ответ: доказано.

**63г)** Запишем данную функцию  $f(x) = 3 + \sin^2 x$  в виде:  $f(x) = 3 + \frac{1 - \cos 2x}{2} = 3,5 - 0,5\cos 2x$ . Область определения этой функции — вся числовая ось. Поэтому точки  $x, x \pm T$  принадлежат области определения  $D(f)$ . Докажем, что периодом функции  $f(x)$  является число  $T = \pi$ . Найдем значение функции  $f(x + T) = f(x + \pi) = 3,5 - 0,5\cos 2(x + \pi) = 3,5 - 0,5\cos(2x + 2\pi) = 3,5 - 0,5\cos 2x = f(x)$ . Было учтено, что функция косинус периодическая с периодом  $2\pi$ . Таким образом, выполняется равенство  $f(x + T) = f(x)$ . Следовательно, данная функция периодическая. Ответ: доказано.

**64а)** Так как функция синус периодичная с периодом  $T = 2\pi$ , то функция  $y = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{4}$  также периодичная с периодом  $\frac{T}{\left|\frac{1}{4}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$ .

Ответ:  $8\pi$ .

**674б)** Так как функция тангенс периодичная с периодом  $T = \pi$ , то функция  $y = 3\operatorname{tg} 1,5x$  также периодичная с периодом  $\frac{T}{\left|1,5\right|} = \frac{\pi}{3/2} = \frac{2}{3}\pi$ .

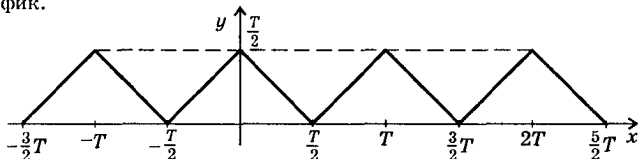
Ответ:  $\frac{2}{3}\pi$ .

**65а)** Используя формулу двойного аргумента, функцию  $y = \sin x \cos x$  запишем в виде  $y = \frac{1}{2} \sin 2x$ . Так как функция синус периодичная с периодом  $T = 2\pi$ , то функция  $y = \frac{1}{2} \sin 2x$  также периодичная с периодом  $\frac{T}{\left|2\right|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ . Ответ:  $\pi$ .

**65г)** Используя формулу для синуса суммы двух углов, функцию  $y = \sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x$  запишем в виде:  $y = \sin (3x + x) = \sin 4x$ . Так как функция синус периодичная с периодом  $T = 2\pi$ , то функция  $y = \sin 4x$  также периодичная с периодом  $\left| \frac{T}{4} \right| = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ .

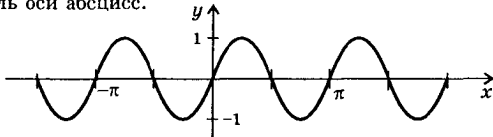
Ответ:  $\frac{\pi}{2}$ .

**66г)** На рисунке 38г приведена часть графика периодической функции  $y(x)$  с периодом  $T$  при  $x \in \left[ -\frac{T}{2}; \frac{T}{2} \right]$ . Так как значения функции повторяются через  $T$ , то чтобы построить ее график на промежутке  $[-1,5T; 2,5T]$ , один раз сдвинем приведенный график на  $T$  влево вдоль оси абсцисс и два раза сдвинем приведенный график на  $T$  вправо вдоль той же оси. В итоге получим требуемый график.



Ответ: см. график.

**67а)** Период функции  $y = \sin 2x$  равен  $\left| \frac{2\pi}{2} \right| = \frac{2\pi}{2} = \pi$ . Используя методы преобразования графиков, легко построить график функции  $y = \sin 2x$ . Он получается из графика функции  $y = \sin x$  сжатым в два раза вдоль оси абсцисс.



Ответ: см. график.

**68а)** Ученик, конечно, не прав. Он проверил, что выполняется равенство  $f(x + T) = f(x)$  только для одного значения  $x = \frac{\pi}{6}$ , хотя оно должно выполняться при любом значении  $x$ . Для функции  $f(x) = \sin x$  найдем значение  $f(0) = \sin 0 = 0$  и  $f(0 + T) = \sin(0 + \frac{2\pi}{3}) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Видно, что при  $x = 0$  равенство  $f(x + T) = f(x)$  уже не выполняется. Это возможно в двух случаях: или функция

$f(x)$  не периодическая или функция  $f(x)$  периодическая, но неправильно найден период  $T$ . Функция  $f(x) = \sin x$  периодическая и ее период  $T = 2\pi$ . Таким образом, ученик неверно нашел период  $T$ .

Ответ: не прав.

**68г)** Ученик не прав. Он проверил выполнение равенства  $f(x + T) = f(x)$  только для одного значения  $x = -4$ , хотя оно должно выполняться при любом значении  $x$ . Для функции  $f(x) = x + |x|$  найдем, например, значение  $f(5) = 5 + |5| = 5 + 5 = 10$  и значение  $f(5 + T) = f(5 + 3) = f(8) = 8 + |8| = 8 + 8 = 16$ . Видно, что при  $x = 5$  равенство  $f(x + T) = f(x)$  уже не выполняется. Это возможно в двух случаях: или функция  $f(x)$  не периодическая, или функция  $f(x)$  периодическая, но неправильно найден период  $T$ . В нашем случае функция  $f(x) = x + |x|$  не периодическая. В этом легко убедиться, построив график данной функции. Ответ: не прав.

**69а)** Область определения функции  $y(x) = \sin x + \operatorname{ctg} x - x$  задается условием  $\sin x \neq 0$  (т.к.  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$  и делить на нуль нельзя), т.е.  $x \neq \pi n$  (где  $n \in \mathbb{Z}$ ). Следовательно, область определения функции  $D(f)$  — симметричное множество. Найдем значение функции  $y(-x) = \sin(-x) + \operatorname{ctg}(-x) - (-x) = -\sin x - \operatorname{ctg} x + x = -(\sin x + \operatorname{ctg} x - x) = -y(x)$ . Была учтена нечетность функций синус и котангенс. Так как в симметричных точках  $x$  и  $-x$  значения функции противоположны по знаку (т.е.  $y(-x) = -y(x)$ ), то данная функция по определению нечетная. Ответ: нечетная функция.

**69в)** Область определения функции  $y(x) = x^4 + \operatorname{tg}^2 x + x \sin x$  задается условием  $\cos x \neq 0$  (т.к.  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$  и делить на нуль нельзя), т.е.  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$  (где  $n \in \mathbb{Z}$ ). Следовательно, область определения функции  $D(f)$  — симметричное множество. Найдем значение функции  $y(-x) = (-x)^4 + \operatorname{tg}^2(-x) + (-x) \cdot \sin(-x) = x^4 + (-\operatorname{tg} x)^2 + (-x)(-\sin x) = x^4 + \operatorname{tg}^2 x + x \sin x = y(x)$ . Была учтена нечетность функций тангенс и синус. Так как в симметричных точках  $x$  и  $-x$  значения функции одинаковы (т.е.  $y(-x) = y(x)$ ), то данная функция по определению четная. Ответ: четная функция.

**70а)** Область определения функции  $y(x) = \frac{\sin x}{x^3 - 1}$  задается условием  $x^3 - 1 \neq 0$  (т.к. делить на нуль нельзя), т.е.  $x \neq 1$ . Следовательно, область определения функции  $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$  не является симметричным множеством, т.е. точка  $x = -1$  принадлежит области  $D(f)$ , а симметричная точка  $x = 1$  не принадлежит  $D(f)$ . Следовательно, данная функция не имеет определенной четности.

Ответ: не имеет определенной четности.

**72в)** Так как функции  $f(x)$  и  $g(x)$  — нечетные, то выполняются равенства:  $f(-x) = -f(x)$  и  $g(-x) = -g(x)$ . Для функции  $h(x) = f(x) + g(x)$  найдем значение  $h(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) = -h(x)$ . Видно, что выполняется равенство  $h(-x) = -h(x)$ . Следовательно, функция  $h(x)$  по определению нечетная.

Ответ: нечетная функция.

**72г)** Так как функции  $f(x)$  и  $g(x)$  — нечетные функции, то выполняются равенства:  $f(-x) = -f(x)$  и  $g(-x) = -g(x)$ . Для функции  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$  найдем значение  $h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = (-f(x)) \times (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = h(x)$ . Видно, что выполняется равенство  $h(-x) = h(x)$ . Следовательно, функция  $h(x)$  по определению четная.

Ответ: четная функция.

**73в)** Используя формулу для разности квадратов, запишем функцию  $y = \sin^4 x - \cos^4 x$  в виде  $y = (\sin^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x$ .

Функция  $y = -\cos 2x$  периодичная с периодом  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ .

Ответ:  $\pi$ .

**73г)** Используя формулу для квадрата суммы чисел, основное тригонометрическое тождество и формулу двойного аргумента, запишем функцию  $y = \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2$  в виде  $y = \sin^2 \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} +$

$+\cos^2 \frac{x}{2} = \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right) + 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 1 + \sin x$ . Очевидно, что период функции  $y = 1 + \sin x$  равен  $2\pi$ . Ответ:  $2\pi$ .

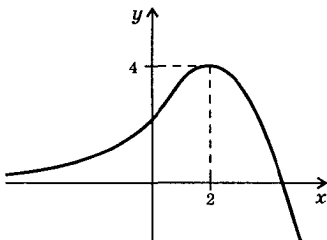
**75)** Так как функция  $f(x)$  периодическая с периодом  $T$ , то выполняется равенство  $f(x+T) = f(x)$ . Рассмотрим значение функции  $y(x) = kf(x) + b$  в точке  $x+T$ . Имеем:  $y(x+T) = kf(x+T) + b = kf(x) + b = y(x)$ . Так как для любого значения  $x$  выполняется равенство  $y(x+T) = y(x)$ , то функция  $y(x)$  периодическая с периодом  $T$ .

Ответ: доказано.

**76а)** Если число  $T$  является периодом функции  $y(x)$ , то для любого значения  $x$  должно выполняться равенство  $y(x+T) = y(x)$ . Для функции  $y(x) = x^2 - 3$  и числа  $T = 2$  проверим выполнение этого равенства. Получаем:  $y(x+2) = (x+2)^2 - 3 = x^2 + 4x + 4 - 3 = x^2 + 4x + 1$ . Приравняем значения функций  $y(x+2)$  и  $y(x)$ . Имеем:  $x^2 + 4x + 1 = x^2 - 3$ , откуда  $x = -1$ . Таким образом равенство  $y(x+T) = y(x)$  выполняется только при одном единственном значении  $x = -1$  (а не при всех  $x$ ). Следовательно, число 2 не является периодом функции  $y(x) = x^2 - 3$ . Заметим, что данная функция не является периодической. Ответ: доказано.

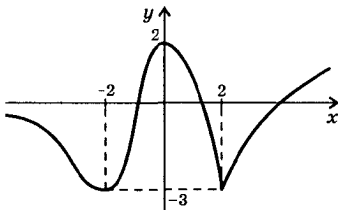
**766)** Если число  $T$  является периодом функции  $y(x)$ , то для любого значения  $x$  должно выполняться равенство  $y(x + T) = y(x)$ . Для функции  $y(x) = \cos x$  и числа  $T = 2$  проверим выполнение этого равенства. Найдем  $y(x + 2) = \cos(x + 2)$  и приравняем это значение величине  $y(x)$ . Получаем:  $\cos(x + 2) = \cos x$ . Очевидно, что при всех  $x$  такое равенство не выполняется. Например, при  $x = 0$   $\cos(0 + 2) \neq \cos 0$  или  $\cos 2 \neq 1$ . Следовательно, число 2 не является периодом функции  $y(x) = \cos x$ . Заметим, что данная функция периодическая, но ее период  $T = 2\pi$ . Ответ: доказано.

**77a)** Обсудим рис. 48a учебника. Из графика видно, что функция  $y(x)$  возрастает на промежутках  $[-7; -5]$  и  $[1; 5]$  и убывает на промежутках  $[-5; 1]$  и  $[5; 7]$ . Точки максимума  $x_{\max} = -5$  и  $x_{\max} = 5$ , точка минимума  $x_{\min} = 1$ . Экстремумы функции  $y_{\max} = y(-5) = 5$ ,  $y_{\max} = y(5) = 3$  и  $y_{\min} = y(1) = -3$ . Ответ: см. решение.



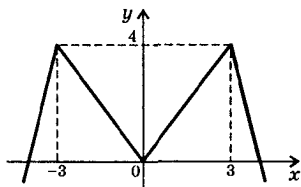
**78a)** По условию задачи график можно построить неоднозначно. Приведем один из возможных вариантов графика функции.

Ответ: см. график.



**796)** Условия задачи определяют функцию не однозначно. Поэтому приведем один из возможных вариантов графика функции.

Ответ: см. график.



**80a)** Так как функция  $f(x)$  — четная, то ее график симметричен относительно оси ординат. Условия задачи определяют функцию не однозначно. Поэтому приведем один из возможных вариантов графика. Ответ: см. график.

**81)** Из области определения  $R$  функции  $y = kx + b$  рассмотрим точки  $x_1$  и  $x_2$  (пусть для определенности  $x_2 > x_1$ ). Найдём разность  $y(x_2) - y(x_1) = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = k(x_2 - x_1)$ . Так как  $x_2 > x_1$ , то величина  $x_2 - x_1 > 0$ . Следовательно, знак разности  $y(x_2) - y(x_1)$  определяется величиной  $k$ . Если  $k > 0$ , то  $y(x_2) - y(x_1) > 0$  или  $y(x_2) > y(x_1)$ , т.е. большему значению  $x_2$  соответствует большее значение функции  $y(x_2)$ . Поэтому в этом случае функция  $y(x)$  возрастает. Если  $k < 0$ , то  $y(x_2) - y(x_1) < 0$  или  $y(x_2) < y(x_1)$ , т.е. большему значению аргумента  $x_2$  соответствует меньшее значение функции  $y(x_2)$ . Поэтому в этом случае функция  $y(x)$  убывает. **Ответ:** доказано.

**82а)** Данную функцию  $y = -x^2 + 6x - 8$  запишем в виде  $y = 1 - (x - 3)^2$ . График этой функции получается смещением графика функции  $y = -x^2$  на три единицы вправо вдоль оси абсцисс и на одну единицу вверх вдоль оси ординат. Тогда понятно, что функция возрастает на промежутке  $(-\infty; 3]$  и убывает на промежутке  $[3; \infty)$ . При этом  $x = 3$  — точка максимума. Максимум функции  $y_{\max} = y(3) = 1 - (3 - 3)^2 = 1$ . Докажем, например, что функция возрастает на промежутке  $(-\infty; 3]$ . Пусть  $x_1, x_2$  принадлежат этому промежутку и  $x_2 > x_1$ . Найдём разность  $y(x_2) - y(x_1) = (-x_2^2 + 6x_2 - 8) - (-x_1^2 + 6x_1 - 8) = x_1^2 - x_2^2 + 6x_2 - 6x_1 = -(x_2^2 - x_1^2) + 6(x_2 - x_1) = -(x_2 - x_1) \times (x_2 + x_1) + 6(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(6 - x_2 - x_1)$ . Определим знак этого произведения. Величина  $x_2 - x_1 > 0$ , т.к.  $x_2 > x_1$ . Так как точки  $x_1$  и  $x_2$  принадлежат промежутку  $(-\infty; 3]$ , то  $x_1 < 3$  и  $x_2 < 3$ . Поэтому  $x_1 + x_2 < 6$  и величина  $6 - x_2 - x_1 > 0$ . Следовательно, произведение  $(x_2 - x_1)(6 - x_2 - x_1) > 0$  и  $y(x_2) > y(x_1)$ , т.е. функция возрастает.

**Ответ:** см. решение.

**83а)** График функции  $y = \frac{3}{x-2}$  получается смещением графика функции  $y = \frac{3}{x}$  на две единицы вправо. Тогда понятно, что функция  $y = \frac{3}{x-2}$  убывает во всей области определения  $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$ . Максимумов и минимумов данная функция не имеет.

**Ответ:** см. решение.

**84а)** График функции  $y = 3\sin x - 1$  получается из графика функции  $y = \sin x$  растяжением в три раза вдоль оси ординат и смещением на одну единицу вниз вдоль той же оси. Поэтому функции  $y = 3\sin x - 1$  и  $y = \sin x$  имеют одинаковые промежутки возрастания и убывания, точки максимума и точки минимума. Поэтому данная функция возрастает на промежутках  $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi l; \frac{\pi}{2} + 2\pi l\right]$  (где

$n \in \mathbb{Z}$ ) и убывает на промежутках  $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$ . В точках  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$  функция имеет максимум  $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - 1 = 3\sin\frac{\pi}{2} - 1 = 3 - 1 = 2$ . В точках  $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$  функция имеет минимум  $y = 3\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) - 1 = 3\sin\frac{3\pi}{2} - 1 = 3 \cdot (-1) - 1 = -4$ .

Ответ: см. решение.

**86а)** Очевидно, что  $0 \leq \frac{3\pi}{7}, \frac{2\pi}{9} \leq \pi$ . На промежутке  $[0; \pi]$  функция  $y = \cos x$  убывает. Сравним числа  $\frac{3\pi}{7}$  и  $\frac{2\pi}{9}$ , найдя их разность:  $\frac{3\pi}{7} - \frac{2\pi}{9} = \frac{3\pi \cdot 9 - 2\pi \cdot 7}{63} = \frac{27\pi - 14\pi}{63} = \frac{13\pi}{63} > 0$ . Получаем  $\frac{3\pi}{7} > \frac{2\pi}{9}$ , тогда значения функции связаны неравенством противоположного знака  $\cos\frac{3\pi}{7} < \cos\frac{2\pi}{9}$ . Ответ:  $\cos\frac{3\pi}{7} < \cos\frac{2\pi}{9}$ .

**86в)** Учтем, что функция тангенс периодична с периодом  $\pi$ , тогда  $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{7} = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{2\pi}{7}\right) = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}$  и  $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5} = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ . Очевидно, что  $0 \leq \frac{2\pi}{7}, \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ . На промежутке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$  функция  $y = \operatorname{tg} x$  возрастает. Сравним числа  $\frac{2\pi}{7}$  и  $\frac{\pi}{5}$ , найдя их разность:  $\frac{2\pi}{7} - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi \cdot 5 - \pi \cdot 7}{35} = \frac{3\pi}{35} > 0$ . Получаем  $\frac{2\pi}{7} > \frac{\pi}{5}$ , тогда значения функции связаны неравенством того же знака:  $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7} > \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$  или  $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{7} > \operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$ .

Ответ:  $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{7} > \operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$ .

**87а)** Для расположения чисел  $\sin 3,2$ ,  $\sin 3,8$  и  $\sin 1,3$  заметим, что  $0 < 1,3 < \pi$ . Поэтому величина  $\sin 1,3 > 0$ . Для чисел  $3,2$  и  $3,8$  выполнено неравенство  $\pi < 3,2 < 3,8 < \frac{3}{2}\pi$ . Тогда величины  $\sin 3,2$  и  $\sin 3,8$  отрицательны. На промежутке  $\left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$  функция синус убывает. Поэтому, так как  $3,8 > 3,2$ , то  $\sin 3,8 < \sin 3,2$ . Следовательно, расположение чисел следующее:  $\sin 3,8 < \sin 3,2 < \sin 1,3$ .

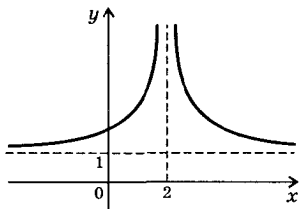
Ответ:  $\sin 3,8; \sin 3,2; \sin 1,3$ .

**87в)** Очевидно, что величины аргументов связаны неравенствами  $-\frac{\pi}{2} < -0,3 < 0,5 < 1,4 < \frac{\pi}{2}$ . На промежутке  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  функция тангенс возрастает. Поэтому тангенсы таких аргументов связаны неравенствами тех же знаков:  $\operatorname{tg}(-0,3) < \operatorname{tg} 0,5 < \operatorname{tg} 1,4$ .

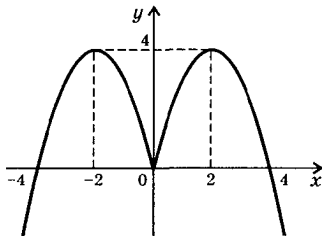
Ответ:  $\operatorname{tg}(-0,3)$ ;  $\operatorname{tg} 0,5$ ;  $\operatorname{tg} 1,4$ .

**88а)** График функции  $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$  получается из графика

функции  $y = \frac{1}{x^2}$  сдвигом на две единицы вправо вдоль оси абсцисс и на одну единицу вверх вдоль оси ординат. На рисунке приведен график данной функции. Видно, что функция возрастает на промежутке  $(-\infty; 2)$  и убывает на промежутке  $(2; \infty)$ . Экстремумов функция не имеет. Ответ: см. решение.



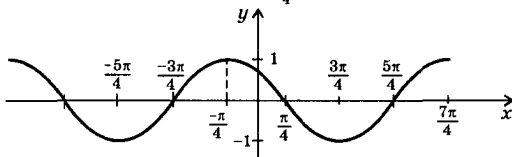
**88б)** Изобразим график функции  $y = 4|x| - x^2$ . Легко проверить, что эта функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат. Поэтому сначала построим график этой функции при  $x \geq 0$ . В этом случае  $|x| = x$  и функция имеет вид  $y(x) = 4x - x^2$ . Видно, что функция возрастает на промежутках  $(-\infty; -2]$  и  $[0; 2]$  и убывает на промежутках  $[-2; 0]$  и  $[2; \infty)$ . Точки  $x_{\max} = \pm 2$  — точки максимума и  $y_{\max} = y(\pm 2) = 4$ . Точка  $x_{\min} = 0$  — точка минимума и  $y_{\min} = y(0) = 0$ .



Ответ: см. решение.

**89а)** График функции  $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  получается из графика

функции  $y = \cos x$  его смещением на  $\frac{\pi}{4}$  влево вдоль оси абсцисс.



Из графика видно, что данная функция возрастает на промежутках  $\left[ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n \right]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Функция убывает на промежутках  $\left[ -\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right]$ . Точки максимума  $x_{\max} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$  и  $y_{\max} = 1$ , точки минимума  $x_{\min} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$  и  $y_{\min} = -1$ .

Ответ: см. решение.

**90а)** Используя формулы приведения и четность функции косинус, запишем числа в виде:

$$\cos \frac{25\pi}{9} = \cos \left( 2\pi + \frac{7\pi}{9} \right) = \cos \frac{7\pi}{9}; \quad \sin \frac{4\pi}{5} = \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{3}{10} \right) = \cos \frac{3\pi}{10};$$

$$\cos \left( -\frac{5\pi}{9} \right) = \cos \frac{5\pi}{9}. \quad \text{Теперь сравниваемые числа } \cos \frac{25\pi}{9}, \sin \frac{4\pi}{5},$$

$$\cos \frac{4\pi}{9}, \cos \left( -\frac{5\pi}{9} \right) \text{ записаны в виде: } \cos \frac{7\pi}{9}, \cos \frac{3\pi}{10}, \cos \frac{4\pi}{9}, \cos \frac{5\pi}{9}.$$

Видно, что аргументы косинусов лежат в диапазоне  $0 + \pi$ , где функция косинус убывает. Расположим эти аргументы в порядке возрастания  $0 < \frac{3\pi}{10} < \frac{4\pi}{9} < \frac{5\pi}{9} < \frac{7\pi}{9} < \pi$ . Тогда косинусы таких аргументов связаны неравенствами противоположного знака:  $\cos \frac{3\pi}{10} >$

$$> \cos \frac{4\pi}{9} > \cos \frac{5\pi}{9} > \cos \frac{7\pi}{9}, \text{ т.е. } \sin \frac{4\pi}{5} > \cos \frac{4\pi}{9} > \cos \left( -\frac{5\pi}{9} \right) > \cos \frac{25\pi}{9}.$$

Ответ:  $\cos \frac{25\pi}{9} < \cos \left( -\frac{5\pi}{9} \right) < \cos \frac{4\pi}{9} < \sin \frac{4\pi}{5}.$

**90б)** Данные числа  $\operatorname{tg} \left( -\frac{5\pi}{7} \right)$ ,  $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$ ,  $\operatorname{ctg} \frac{15\pi}{8}$ ,  $\operatorname{tg} \left( -\frac{7\pi}{16} \right)$  представим в виде тангенсов с аргументами, расположенными в промежутке  $\left( -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ , т.к. на этом промежутке функция тангенс возрастает.

$$\begin{aligned} \text{Получаем: } \operatorname{tg} \left( -\frac{5\pi}{7} \right) &= \operatorname{tg} \left( -\frac{5\pi}{7} + \pi \right) = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7}; \quad \operatorname{ctg} \frac{15\pi}{8} = \operatorname{ctg} \left( \pi + \frac{7\pi}{8} \right) = \\ &= \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{8} = \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \right) = -\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} = \operatorname{tg} \left( -\frac{3\pi}{8} \right). \quad \text{Тогда надо сравнить} \end{aligned}$$

числа:  $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{7}$ ;  $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$ ;  $\operatorname{tg} \left( -\frac{3\pi}{8} \right)$ ;  $\operatorname{tg} \left( -\frac{7\pi}{16} \right)$ . Расположим аргументы

тангенсов в порядке возрастания:  $-\frac{\pi}{2} < -\frac{7\pi}{16} < -\frac{3\pi}{8} < \frac{2\pi}{7} < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ .

Тогда тангенсы этих аргументов связаны неравенствами того же

знака:  $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{16}\right) < \operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{8}\right) < \operatorname{tg}\frac{2\pi}{7} < \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$ , т.е.  $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{16}\right) < \operatorname{ctg}\frac{15\pi}{8} < \operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$ . Ответ:  $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{16}\right) < \operatorname{ctg}\frac{15\pi}{8} < \operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$ .

**91а)** Рассмотрим две произвольные точки  $x_1$  и  $x_2$  из промежутка  $[0; \infty)$ . Пусть для определенности  $x_2 > x_1$ . Для функции  $f(x) = x^4 + 3x$  найдем разность  $f(x_2) - f(x_1) = (x_2^4 + 3x_2) - (x_1^4 + 3x_1) = (x_2^4 - x_1^4) + 3(x_2 - x_1) = (x_2^2 - x_1^2)(x_2^2 + x_1^2) + 3(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2) + 3(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)[(x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2) + 3] > 0$ . Это произведение положительно, т.к.  $x_2 > x_1$  и величина  $x_2 - x_1 > 0$ . Второй множитель также положительный, т.к.  $x_2 > x_1 \geq 0$ . Следовательно,  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , т.е.  $f(x_2) > f(x_1)$ . Так как большему значению аргумента  $x_2$  соответствует большее значение функции  $f(x_2)$ , то функция  $f(x)$  возрастает на данном промежутке (по определению). Ответ: доказано.

**91б)** Рассмотрим две точки  $x_1$  и  $x_2$  из области определения функции  $R$ . Пусть для определенности  $x_2 > x_1$ . Для функции  $f(x) = -x^3 - 2x$  рассмотрим разность  $f(x_2) - f(x_1) = (-x_2^3 - 2x_2) - (-x_1^3 - 2x_1) = (x_1^3 - x_2^3) + 2(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 2(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2) < 0$ . Это произведение отрицательно, т.к.  $x_2 > x_1$  и величина  $x_1 - x_2 < 0$ . Второй множитель  $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 - 2 > 0$  при всех  $x_1$  и  $x_2$ . Следовательно,  $f(x_2) - f(x_1) < 0$ , т.е.  $f(x_2) < f(x_1)$ . Так как большему значению аргумента  $x_2$  соответствует меньшее значение функции  $f(x_2)$ , то функция  $f(x)$  убывает на всей числовой оси (по определению).

Ответ: доказано.

**92а)** Если  $x_0$  — точка максимума, то в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство  $f(x_0) \geq f(x)$ , т.е. значение функции в точке  $x_0$  самое большое. Так как функция  $f(x)$  четная, то справедливо равенство  $f(-x_0) = f(x_0)$ . Подставим это соотношение в неравенство и получим:  $f(-x_0) \geq f(x)$ , которое означает, что значение функции в точке  $(-x_0)$  самое большое. Следовательно, точка  $(-x_0)$  также точка максимума. Ответ: доказано.

**92б)** Если функция  $f(x)$  возрастает на промежутке  $[a, b]$ , то для  $x_1$  и  $x_2$  из этого промежутка (т.е.  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ ) выполняется нера-

венство  $f(x_1) < f(x_2)$ , т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Умножим все члены неравенства  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$  на отрицательное число  $(-1)$ . При этом знаки неравенств меняются на противоположные:  $-a \geq -x_1 > -x_2 \geq -b$ . Такое неравенство означает, что рассматриваемые точки  $(-x_1)$  и  $(-x_2)$  из промежутка  $[-b; -a]$ , причем  $-x_1 > -x_2$ . Так как функция  $f(x)$  четная, то неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$  можно записать в виде  $f(-x_1) < f(-x_2)$ . Тогда видно, что большему значению аргумента  $(-x_1)$  соответствует меньшее значение функции  $f(-x_1)$ . Следовательно, функция  $f(x)$  на промежутке  $[-b; -a]$  убывает. Ответ: доказано.

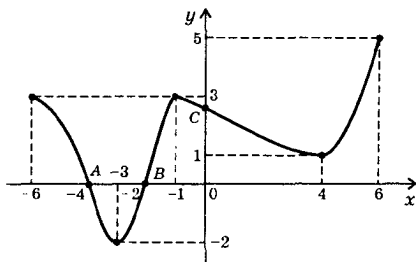
**93а)** Опишем свойства функции  $y(x)$ , изображенной на рис. 57а. Область определения функции  $D(y) = [-8; 5]$ , область значений функции  $E(y) = [-2; 5]$ . Точки пересечения с осью абсцисс имеют координаты  $(1; 0)$ ,  $(5; 0)$ , точка пересечения с осью ординат имеет координаты  $(0; 2,5)$ . Промежутки знакопостоянства:  $y(x) > 0$  при  $x \in [-8; 1]$  и  $y(x) < 0$  при  $x \in (1; 5]$ . Функция возрастает на промежутках  $[-5; -1]$  и  $[3; 5]$  и убывает на промежутках  $[-8; -5]$  и  $[-1; 3]$ . Точка максимума функции  $x_{\max} = -1$  и  $y_{\max} = y(-1) = 3$ . Точки минимума функции  $x_{\min} = -5$  и  $y_{\min} = y(-5) = -2$ ;  $x_{\min} = 3$  и  $y_{\min} = y(3) = -2$ . Других особенностей данная функция не имеет.

Ответ: см. решение.

**93б)** Опишем свойства функции  $y(x)$ , изображенной на рис. 57б. Область определения функции  $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$ , область значений функции  $E(y) = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$ . Точка пересечения с осью ординат  $(0; 0)$ , т.е. график проходит через начало координат. Промежутки знакопостоянства:  $y(x) > 0$  при  $x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$  и  $y(x) < 0$  при  $x \in (-2; 0)$ . Функция возрастает на всей области определения. Функция не имеет точек максимума и минимума. Прямая  $x = -2$  является вертикальной асимптотой этой функции, прямая  $y = 2$  является горизонтальной асимптотой этой функции.

Ответ: см. решение.

**94а)** В соответствии со свойствами функции, приведенными в

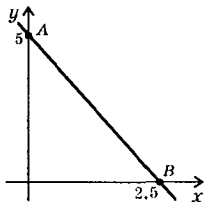


таблице, построим график этой функции.

Разумеется, это только одно из возможных решений.

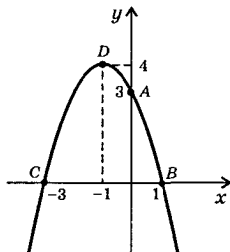
Ответ: см. график.

**95а)** Область определения функции  $f(x) = 5 - 2x$  — вся числовая ось, т.е.  $D(f) = R$ . Область значений функции  $E(f) = R$ . Найдем точки пересечения с осями координат. Сначала найдем точку пересечения с осью ординат. Для этого в уравнении функции положим  $x = 0$  и найдем  $f(0) = 5 - 2 \cdot 0 = 5$ . Поэтому координаты точки  $A(0; 5)$ . Чтобы найти точки пересечения с осью абсцисс, положим  $f(x) = 0$ . Получаем линейное уравнение  $0 = 5 - 2x$ , откуда  $x = 2,5$ . Следовательно, координаты точки  $B(2,5; 0)$ . Определим промежутки знакопостоянства функции. Если  $f(x) > 0$ , то получаем неравенство  $5 - 2x > 0$ , откуда  $x < 2,5$ , т.е.  $x \in (-\infty; 2,5)$ . Если  $f(x) < 0$ , то имеем неравенство  $5 - 2x < 0$ , откуда  $x > 2,5$ , т.е.  $x \in (2,5; \infty)$ . Докажем, что функция убывает во всей области определения. Пусть  $x_2 > x_1$ . Рассмотрим разность  $f(x_2) - f(x_1) = (5 - 2x_2) - (5 - 2x_1) = 2x_1 - 2x_2 = 2(x_1 - x_2) < 0$ , т.к.  $x_1 < x_2$ . Следовательно  $f(x_2) - f(x_1) < 0$  или  $f(x_2) < f(x_1)$ , т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Учтем, что данная функция линейная и ее графиком является прямая. Ответ: см. решение.



**95б)** Область определения функции  $f(x) = 3 - 2x - x^2$  — вся числовая ось, т.е.  $D(f) = R$ . Область значений функции пока находить не будем. Найдем точки пересечения с осями координат. Сначала найдем точку пересечения с осью ординат. Для этого в уравнении функции положим  $x = 0$  и найдем  $f(0) = 3 - 2 \cdot 0 - 0^2 = 3$ . Поэтому координаты точки  $A(0; 3)$ . Чтобы найти точки пересечения с осью абсцисс, положим  $f(x) = 0$ . Получаем квадратное уравнение:  $0 = 3 - 2x - x^2$  или  $0 = x^2 + 2x - 3$ , корни которого  $x_1 = 1$  и  $x_2 = -3$ . Следовательно, координаты этих точек  $B(1; 0)$  и  $C(-3; 0)$ . Определим промежутки знакопостоянства функции. Если  $f(x) > 0$ , то получаем неравенство  $3 - 2x - x^2 > 0$  или  $x^2 + 2x - 3 < 0$ , решение которого  $x \in (-3; 1)$ . Если  $f(x) < 0$ , то имеем неравенство  $3 - 2x - x^2 < 0$  или  $x^2 + 2x - 3 > 0$ , решение которого  $x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$ .

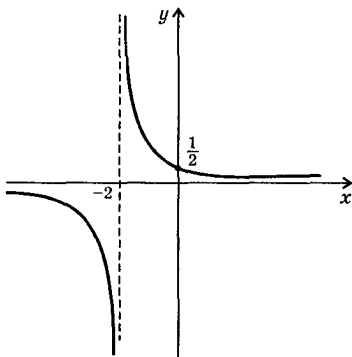
Учтем, что графиком данной функции является парабола. Найдем координаты вершины параболы:  $x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot (-1)} = -1$  и  $y_{\text{в}} = f(x_{\text{в}}) = 3 - 2 \cdot (-1) - (-1)^2 = 3 + 2 - 1 = 4$ . Координаты вершины параболы  $D(-1; 4)$ . Ветви параболы направлены вниз. Поэтому область значений функции  $E(f) = (-\infty; 4]$ . Точка максимума  $x_{\text{max}} = -1$



и  $y_{\max} = y(-1) = 4$ . Функция возрастает на промежутке  $(-\infty; -1]$  и убывает на промежутке  $[-1; \infty)$ . График функции симметричен относительно прямой  $x = -1$ . Ответ: см. решение.

**96в)** Область определения функции  $f(x) = \frac{1}{x+2}$  — все значения  $x$ , кроме  $x = -2$  (т.к. делить на нуль нельзя), т.е.  $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$ . Область значений функции  $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ . Найдем точки пересечения с осями координат. Найдем точку пересечения с осью ординат. Для этого в уравнении функции положим  $x = 0$  и найдем  $f(0) = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}$ . Чтобы найти точки пересечения с осью абс-

цисс, положим  $f(x) = 0$ . Получаем уравнение  $0 = \frac{1}{x+2}$ , которое не имеет решений. Следовательно, график функции с осью абсцисс не пересекается.



Найдем промежутки знакопостоянства функции. Если  $f(x) > 0$ , то получаем неравен-

ство  $\frac{1}{x+2} > 0$  или  $x+2 > 0$ ,

т.е.  $x \in (-2; \infty)$ . Если  $f(x) < 0$ ,

то имеем неравенство  $\frac{1}{x+2} < 0$

или  $x+2 < 0$ , откуда  $x \in (-\infty; -2)$ . Легко показать, что во всей области определения функция убывает. Функция не существует при  $x = -2$ , что является вертикальной асимптотой.

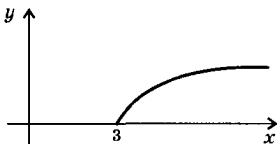
При больших значениях  $x$  величина  $y \approx 0$ . Следовательно,  $y = 0$  — горизонтальная асимптота. Ответ: см. решение.

**97а)** Область определения функции  $f(x) = \sqrt{x-3}$  задается условием  $x-3 \geq 0$  (подкоренное выражение должно быть неотрицательным), откуда  $x \geq 3$ , т.е.  $D(f) = [3; \infty)$ . Так как  $\sqrt{x-3} \geq 0$ , то область значений функции  $E(f) = [0; \infty)$ . Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Так как  $x \geq 3$ , то с осью ординат график не пересекается. С осью абсцисс график имеет общую точку  $x = 3$ . Очевидно, что в области определения функции  $f(x) \geq 0$ . Также в области определения функция возрастает: если  $x_2 > x_1$ , то

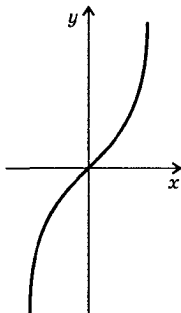
$$x_2 - 3 > x_1 - 3 \text{ и } \sqrt{x_2 - 3} > \sqrt{x_1 - 3},$$

т.е.  $f(x_2) > f(x_1)$ . Никаких других особенностей функция не имеет.

Ответ: см. решение.

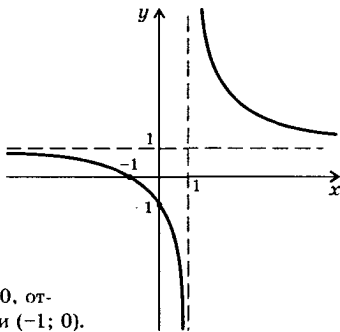


**98а)** Область определения функции  $f(x) = x^3 + x$  — вся числовая ось, т.е.  $D(f) = R$ . Область значений функции также вся числовая ось, т.е.  $E(f) = R$ . Точка пересечения с осями координат — начало координат  $(0; 0)$ . Найдем промежутки знакопостоянства функции. Если  $f(x) > 0$ , то имеем неравенство  $x^3 + x > 0$  или  $x(x^2 + 1) > 0$ , решение которого  $x > 0$ , т.е.  $x \in (0; \infty)$ . Если  $f(x) < 0$ , то аналогично находим  $x \in (-\infty; 0)$ . Докажем, что функция возрастает на всей числовой оси. Пусть  $x_2 > x_1$ , найдем разность  $f(x_2) - f(x_1) = (x_2^3 + x_2) - (x_1^3 + x_1) = (x_2^3 - x_1^3) + (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) + (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 + 1) > 0$ , т.к. величина  $x_2 - x_1 > 0$  и неполный квадрат  $x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 > 0$  при всех  $x_2$  и  $x_1$ . Легко убедиться, что данная функция нечетная. Найдем  $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$ . Следовательно, график этой функции симметричен относительно начала координат.



Ответ: см. решение.

**99б)** Область определения функции  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  задается условием  $x - 1 \neq 0$  (делить на нуль нельзя), откуда  $x \neq 1$ , т.е.  $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ . Область изменения функции  $E(f) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ . Найдем точки пересечения с осями координат. Сначала найдем точку пересечения с осью ординат. В уравнении функции положим  $x = 0$  и найдем  $f(0) = \frac{0+1}{0-1} = -1$ . Координата этой точки  $(0; -1)$ . Найдем точку пересечения с осью абсцисс. В уравнении функции положим  $f(x) = 0$ . Получаем уравнение  $0 = \frac{x+1}{x-1}$ . Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю:  $x + 1 = 0$ , откуда  $x = -1$ . Координата этой точки  $(-1; 0)$ .



Найдем промежутки знакопостоянства функции. Если  $f(x) > 0$ , то получаем неравенство  $\frac{x+1}{x-1} > 0$ , решение которого  $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ . Если  $f(x) < 0$ , то имеем неравенство  $\frac{x+1}{x-1} < 0$ , решение которого  $x \in (-1; 1)$ . Можно показать, что функция  $f(x)$  убывает во всей области определения. Функция  $f(x)$  не определена при  $x = 1$ . Поэтому  $x = 1$  — вертикальная асимптота. При больших значениях  $x$  значение функции  $y \approx \frac{x}{x} = 1$ . Поэтому  $y = 1$  — горизонтальная асимптота. Заметим, что графиком дробно-линейной функции  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  является гипербола. Ответ: см. решение.

**100а)** Учтем, что период функции тангенс  $\pi$ . Тогда получаем:  $\operatorname{tg} \frac{18\pi}{5} = \operatorname{tg} \left( 3\pi + \frac{3\pi}{5} \right) = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{5}$ . Учтем, что период функции синус  $2\pi$ , а также формулы приведения. Получаем:  $\sin \frac{28\pi}{3} = \sin \left( 8\pi + \frac{4\pi}{3} \right) = \sin \frac{4\pi}{3} = \sin \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3}$ . Ответ:  $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{5}$ ;  $-\sin \frac{\pi}{3}$ .

**101а)** Функция  $f(x) = 3\cos 2x - 1$  определена на всей числовой оси, т.е.  $D(f) = \mathbb{R}$ . Найдем область значений этой функции. Учтем ограниченность функции косинус:  $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ . Умножим все части этого неравенства на положительное число 3 (при этом знак неравенства сохраняется):  $-3 \leq 3\cos 2x \leq 3$ . Вычтем из всех частей неравенства число 1:  $-3 - 1 \leq 3\cos 2x - 1 \leq 3 - 1$  или  $-4 \leq 3\cos 2x - 1 \leq 2$  или  $-4 \leq f(x) \leq 2$ . Следовательно, область значений этой функции  $E(f) = [-4; 2]$ . Ответ:  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $E(f) = [-4; 2]$ .

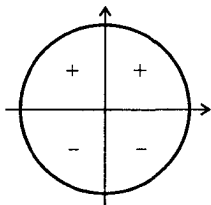
**101в)** Область определения функции тангенс  $\left( -\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$ .

Поэтому для функции  $f(x) = 2\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  получаем:  $-\frac{\pi}{2} + \pi n < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + \pi n$ . Умножим все части этого неравенства на положительное число 2 (при этом знаки неравенств сохраняются):  $-\pi + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n$ . Следовательно, область определения данной функции  $D(f) = (-\pi + 2\pi n; \pi + 2\pi n)$ . Область значений функции  $E(f) = \mathbb{R}$ .

Ответ:  $D(f) = (-\pi + 2\pi n; \pi + 2\pi n)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $E(f) = \mathbb{R}$ .

**102а)** Для функции  $f(x) = -\sin 3x$  определим нули и промежутки знакопостоянства функции. Сначала найдем нули функции. Получаем уравнение:  $0 = -\sin 3x$  или  $0 = \sin 3x$ , откуда  $3x = \pi n$

(где  $n \in \mathbb{Z}$ ) и  $x = \frac{\pi}{3}n$ . Теперь найдем промежутки знакопостоянства функции. Если  $f(x) > 0$ , то получаем неравенство:  $-\sin 3x > 0$  или  $\sin 3x < 0$ . Из тригонометрического круга видно, что значения синуса отрицательны, если аргумент принадлежит третьей или четвертой четверти, т.е.  $\pi + 2\pi l < 3x < 2\pi + 2\pi l$ , откуда  $\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi l < x < \frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi l$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Если  $f(x) < 0$ , то имеем неравенство:  $-\sin 3x < 0$  или  $\sin 3x > 0$ . Видно, что значения синуса положительны, если аргумент принадлежит первой или второй четверти, т.е.  $2\pi l < 3x < \pi + 2\pi l$ , откуда  $\frac{2}{3}\pi l < x < \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi l$ .

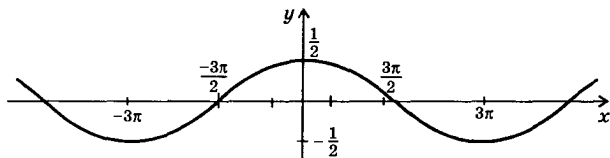


Ответ:  $f(x) = 0$  при  $x = \frac{\pi}{3}n$ ,  $f(x) > 0$  при  $\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi l < x < \frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi l$ ,  $f(x) < 0$  при  $\frac{2}{3}\pi l < x < \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi l$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**103а)** Учтем свойства функции косинус. Функция  $f(x) = 4\cos 3x$  возрастает, если  $-\pi + 2\pi l \leq 3x \leq 2\pi l$ , откуда  $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi l; \frac{2}{3}\pi l\right]$ . Функция убывает, если  $2\pi l \leq 3x \leq \pi + 2\pi l$ , откуда  $x \in \left[\frac{2}{3}\pi l; \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi l\right]$ . Точки максимума данной функции определяются условием  $3x = -2\pi l$ , откуда  $x_{\max} = \frac{2}{3}\pi l$ . Точки минимума функции определяются условием  $3x = \pi + 2\pi l$ , откуда  $x_{\min} = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi l$ .

Ответ: промежутки возрастания  $\left[-\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi l; \frac{2}{3}\pi l\right]$ , промежутки убывания  $\left[\frac{2}{3}\pi l; \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi l\right]$ ,  $x_{\max} = \frac{2}{3}\pi l$ ,  $x_{\min} = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi l$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**104а)** Функция  $f(x) = \frac{1}{2}\cos \frac{x}{3}$  может быть исследована аналогично задачам 101—103. График этой функции получается из графика функции  $f(x) = \cos x$  при его растяжении в три раза вдоль оси абсцисс и сжатии в два раза вдоль оси ординат. Из графика легко получаются все свойства этой функции.



Ответ: см. решение.

**106а)** Сравним конкретный колебательный процесс  $x(t) = 3,5 \cos 4\pi t$  с общим видом колебания  $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ . Из сравнения сразу определим амплитуду  $A = 3,5$  и частоту  $\omega = 4\pi$ . Зная частоту  $\omega$ , найдем период колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$ . Координату тела  $x(t)$  в момент времени  $t_1 = \frac{1}{12}$  с найдем, подставив эту величину в уравнение функции:  $x(t_1) = 3,5 \cos\left(4\pi \cdot \frac{1}{12}\right) = 3,5 \cos \frac{\pi}{3} = 3,5 \cdot \frac{1}{2} = 1,75$ . Ответ:  $A = 3,5$ ;  $\omega = 4\pi$ ;  $T = \frac{1}{2}$ ;  $x(t_1) = 1,75$ .

**109а)** Чтобы расположить в порядке возрастания числа  $\cos 4$ ,  $\cos 7$ ,  $\cos 9$ ,  $\cos(-12,5)$ , запишем их в таком виде, чтобы значения аргументов принадлежали промежутку убывания функции косинус — отрезку  $[0; \pi]$ . Получаем:  $\cos 4 = \cos(-4) = \cos(2\pi - 4)$ ,  $\cos 7 = \cos(7 - 2\pi)$ ,  $\cos 9 = \cos(9 - 2\pi)$ ,  $\cos(-12,5) = \cos(4\pi - 12,5)$ . Теперь запишем эти аргументы в порядке возрастания (для оценок можно принять  $\pi \approx 3,14$ ):  $0 < 4\pi - 12,5 < 7 - 2\pi < 2\pi - 4 < 9 - 2\pi < \pi$ . Тогда косинусы этих аргументов связаны неравенствами противоположных знаков:  $\cos(4\pi - 12,5) > \cos(7 - 2\pi) > \cos(2\pi - 4) > \cos(9 - 2\pi)$ , т.е.  $\cos(-12,5) > \cos 7 > \cos 4 > \cos 9$ .

Ответ:  $\cos 9 < \cos 4 < \cos 7 < \cos(-12,5)$ .

**110а)** Область определения функции  $y = \frac{1}{1 - \sin x}$  задается условием:  $1 - \sin x \neq 0$  (делить на ноль нельзя) или  $\sin x \neq 1$ , т.е.  $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Поэтому  $D(y) = \mathbb{R}$  кроме точек  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ .

Ответ:  $\mathbb{R}$ , кроме точек  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**110б)** Запишем данную функцию  $y = \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}$  в виде

$$y = \sqrt{-\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right)} = \sqrt{-\cos x}. \text{ Область определения задается}$$

условием:  $-\cos x \geq 0$  (подкоренное выражение должно быть неотрицательным) или  $\cos x \leq 0$ . Значения косинуса не положительны, если аргумент находится во второй или третьей четверти, т.е.

$\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Следовательно, область определе-

ния функции  $D(f) = \left[ \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right]$ .

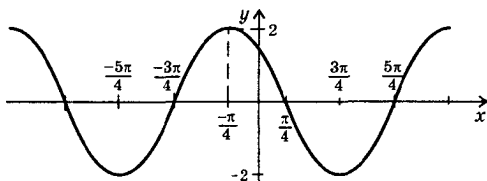
Ответ:  $\left[ \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**111а)** Чтобы найти область значений функции  $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ , умножим и разделим ее на 2:  $y = 2 \left( \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right)$ . Учтем, что  $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$  и  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$ , тогда  $y = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} \sin x - \sin \frac{\pi}{3} \cos x \right) = 2 \left( \sin x \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \sin \frac{\pi}{3} \right)$ . Используя формулу для синуса разности двух углов, получим:  $y = 2 \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right)$ . Область значений этой функции  $E(y) = [-2; 2]$ . Ответ:  $[-2; 2]$ .

**111б)** При рассмотрении функции  $y = \frac{3}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$  учтем, что область значений функции  $z = \operatorname{tg} x$   $E(z) = \mathbb{R}$ . Тогда функцию  $y$  можно записать в виде  $y = \frac{3}{1 + z^2}$ . Так как  $1 \leq 1 + z^2 < \infty$ , то легко найти область значений данной функции  $E(y) = (0; 3]$ . Ответ:  $(0; 3]$ .

**111в)** Для данной функции  $y = \sqrt{1 - \cos 4x}$  учтем ограниченность функции косинус:  $-1 \leq \cos 4x \leq 1$ . Умножим все части этого неравенства на отрицательное число  $(-1)$ . При этом знаки неравенств меняются на противоположные  $1 \geq -\cos 4x \geq -1$ . Ко всем частям неравенства прибавим число 1:  $1 + 1 \geq 1 - \cos 4x \geq 1 - 1$  или  $2 \geq 1 - \cos 4x \geq 0$ . Извлечем квадратный корень из всех неотрицательных частей неравенства (при этом знаки неравенства сохраняются). Получаем:  $\sqrt{2} \geq \sqrt{1 - \cos 4x} \geq 0$  или  $\sqrt{2} \geq y \geq 0$ . Итак, область значений данной функции  $E(y) = [0; \sqrt{2}]$ . Ответ:  $[0; \sqrt{2}]$ .

**112а)** График функции  $f(x) = 2 \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$  получается из графика функции  $y = \cos x$  смещением на  $\frac{\pi}{4}$  влево вдоль оси абсцисс



и растяжением в два раза вдоль оси ординат.

Ответ: см. решение.

**114а)** Из рис. 64а учебника видно, что амплитуда силы тока  $A = 15$ , период  $T = 0,4$ , тогда  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,4} = 5\pi$ . Запишем зависимость силы тока от времени:  $I = 15\sin(5\pi t)$ .

Ответ:  $A = 15$ ;  $T = 0,4$ ;  $I = 15\sin(5\pi t)$ .

**115)** Рассмотрим колебательный процесс  $x(t) = 5\cos\left(\frac{\pi t}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$ .

а) Смещение максимально, если функция косинус имеет максимум, т.е. если ее аргумент равен  $2\pi$ . Получаем уравнение:  $\frac{\pi t}{4} - \frac{\pi}{3} = 2\pi$ . Умножим все члены уравнения на  $\frac{12}{\pi}$ :  $3t + 4 = 24$ , откуда  $t = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$ .

в) Смещение равно 0, если функция косинус равна нулю, т.е. если ее аргумент равен  $\frac{\pi}{2}$ . Получаем уравнение:  $\frac{\pi t}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ . Умножим все члены уравнения на  $\frac{12}{\pi}$ :  $3t + 4 = 6$ , откуда  $t = \frac{2}{3}$ .

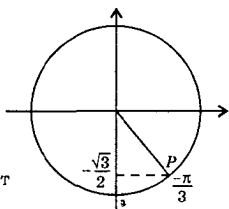
Ответ: а)  $6\frac{2}{3}$ , в)  $\frac{2}{3}$ .

### § 3. Решение тригонометрических уравнений и неравенств

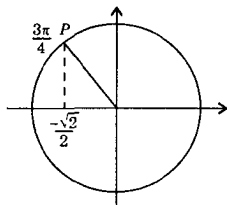
**116а)** Функция  $y = x^7$  на всей числовой оси возрастает. Поэтому уравнение  $x^7 = 3$  на промежутке  $x \in (-\infty; \infty)$  имеет только одно решение. Ответ: одно.

**1176)** На промежутке  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  функция  $y = 2\sin x$  возрастает. Поэтому уравнение  $2\sin x = 1,5$  на этом промежутке имеет только одно решение. Ответ: одно.

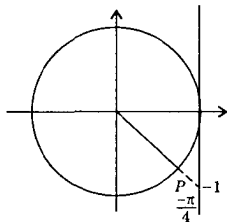
**118в)** Отложим на оси ординат значение  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  и построим угол  $t$ , удовлетворяющий условиям:  $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  и  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . Этим условиям удовлетворяет только одно значение  $t = -\frac{\pi}{3}$ . Ответ:  $-\frac{\pi}{3}$ .



**119в)** На оси абсцисс отложим значение  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  и построим угол  $t$ , удовлетворяющий условиям:  $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  и  $t \in [0; \pi]$ . Этим условиям удовлетворяет только одно значение  $t = \frac{3\pi}{4}$ . Ответ:  $\frac{3\pi}{4}$ .



**120а)** На оси тангенсов отложим значение  $(-1)$  и построим угол  $t$ , удовлетворяющий условиям:  $\operatorname{tg} t = -1$  и  $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ . Этим условиям удовлетворяет только одно значение  $t = -\frac{\pi}{4}$ . Ответ:  $-\frac{\pi}{4}$ .



**121б)** Пусть  $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = z$ . Величина  $z$  удовлетворяет двум условиям:  $z \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  и  $\sin z = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Находим  $z = -\frac{\pi}{3}$ .

Ответ:  $-\frac{\pi}{3}$ .

**122а)** Пусть  $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = z$ . Величина  $z$  удовлетворяет двум условиям:  $z \in [0; \pi]$  и  $\cos z = -\frac{1}{2}$ . Находим  $z = \frac{2\pi}{3}$ .

Ответ:  $\frac{2\pi}{3}$ .

**123а)** Пусть  $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = z$ . Величина  $z$  удовлетворяет двум условиям:  $z \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  и  $\operatorname{tg} z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Находим  $z = \frac{\pi}{6}$ . Ответ:  $\frac{\pi}{6}$ .

**124)** Выражения  $\arcsin a$  и  $\arccos a$  имеют смысл, если  $|a| \leq 1$ . Поэтому выражения  $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$  и  $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$  имеют смысл, т.к.  $\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} \leq 1$  и  $\left|\sqrt{\frac{2}{3}}\right| = \sqrt{\frac{2}{3}} \leq 1$ . Выражения  $\arccos\sqrt{5}$  и  $\arcsin 1,5$  смысла не имеют, т.к.  $\sqrt{5} > 1$  и  $|1,5| = 1,5 > 1$ .

Ответ: а, г) имеют смысл; б, в) смысла не имеют.

**126б)** Учитывая определения обратных тригонометрических функций и таблицу значений тригонометрических функций, получим:  $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$ . Ответ:  $\frac{\pi}{12}$ .

**129б)** Для сравнения данных чисел вычислим их:

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$  и  $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ . Очевидно, что  $\frac{2\pi}{3} > -\frac{\pi}{4}$ , т.е.  $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) > \operatorname{arctg}(-1)$ . Ответ:  $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) > \operatorname{arctg}(-1)$ .

**129в)** Сначала вычислим данные числа:  $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$  и  $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ . Очевидно, что  $\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$ , т.е.  $\operatorname{arctg} \sqrt{3} < \arcsin 1$ .

Ответ:  $\operatorname{arctg} \sqrt{3} < \arcsin 1$ .

**131)** Учитывая определения обратных тригонометрических функций и таблицу значений тригонометрических функций, получаем:

$$\begin{aligned} \text{а) } 2 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-1) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} &= 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} = \\ &= -\frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } 3 \arcsin \frac{1}{2} + 4 \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) &= 3 \cdot \frac{\pi}{6} + 4 \cdot \frac{3}{4} \pi - \frac{5}{6} \pi = \\ &= \frac{\pi}{2} + 3\pi - \frac{5}{6} \pi = 2\frac{2}{3} \pi. \end{aligned}$$

$$\text{в) } \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin 1 = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

$$\text{г) } \arcsin(-1) - \frac{3}{2} \arccos \frac{1}{2} + 3 \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3} + 3 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}\pi.$$

Ответ: а)  $-\frac{2\pi}{3}$ ; б)  $2\frac{2}{3}\pi$ ; в)  $\pi$ ; г)  $-\frac{3}{2}\pi$ .

**132а)** Пусть произвольные числа  $x_1$  и  $x_2$  принадлежат промежутку  $[-1; 1]$  и  $x_1 < x_2$ . Надо доказать, что  $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$ . Обозначим  $t_1 = \arcsin x_1$  и  $t_2 = \arcsin x_2$ . Тогда  $x_1 = \sin t_1$  и  $x_2 = \sin t_2$ ,

причем  $t_1$  и  $t_2$  принадлежат промежутку  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . Запишем неравенство  $x_1 < x_2$  в виде  $\sin t_1 < \sin t_2$ . Так как на промежутке  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  функция  $\sin t$  возрастающая, то из неравенства  $\sin t_1 < \sin t_2$  следует, что  $t_1 < t_2$  или  $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$ . Таким образом, утверждение доказано. Ответ: доказано.

**134а)** Учтем, что функция  $\arcsin x$  возрастающая (см. предыдущую задачу). Поэтому расположим аргументы арксинусов в порядке возрастания:  $-0,3 < \frac{\pi}{6} < 0,9$ . Тогда арксинусы этих величин связаны неравенствами того же знака:  $\arcsin(-0,3) < \arcsin \frac{\pi}{6} < \arcsin 0,9$ . Ответ:  $\arcsin(-0,3) < \arcsin \frac{\pi}{6} < \arcsin 0,9$ .

**134в)** Учтем, что функция  $\arccos x$  убывающая (см. задачу 132б). Поэтому расположим аргументы арккосинусов в порядке убывания:  $0,4 > -0,2 > -0,8$ . Тогда арккосинусы этих величин связаны неравенствами противоположного знака:  $\arccos 0,4 < \arccos(-0,2) < \arccos(-0,8)$ . Ответ:  $\arccos 0,4 < \arccos(-0,2) < \arccos(-0,8)$ .

**135а)** Учтем, что функция  $\operatorname{arctg} x$  возрастающая (см. задачу 133а). Поэтому расположим аргументы арктангенсов в порядке возрастания:  $-5 < 0,7 < 100$ . Тогда арктангенсы этих величин связаны неравенствами того же знака:  $\operatorname{arctg}(-5) < \operatorname{arctg} 0,7 < \operatorname{arctg} 100$ .

Ответ:  $\operatorname{arctg}(-5) < \operatorname{arctg} 0,7 < \operatorname{arctg} 100$ .

**135б)** Учтем, что функция  $\operatorname{arccotg} x$  убывающая (см. задачу 133б). Поэтому расположим аргументы арккотангенсов в порядке убывания:  $\pi > 1,2 > -5$ . Тогда арккотангенсы этих величин связаны неравенствами противоположного знака:  $\operatorname{arccotg} \pi < \operatorname{arccotg} 1,2 < \operatorname{arccotg}(-5)$ . Ответ:  $\operatorname{arccotg} \pi < \operatorname{arccotg} 1,2 < \operatorname{arccotg}(-5)$ .

**1366)** Используя известную формулу, запишем решения уравнения  $\cos x = -\frac{1}{2}$ . Имеем:  $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Ответ:  $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**1376)** Из уравнения  $\sqrt{2} \cos x - 1 = 0$  выразим  $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Используя известную формулу, запишем решения этого уравнения:  $x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi n = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**138а)** Используя известную формулу, запишем решения уравнения  $\sin x = \frac{1}{2}$ . Получаем:  $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} - \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Ответ:  $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**139б)** Из уравнения  $2\sin x + \sqrt{3} = 0$  выразим  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Используя известную формулу, запишем решения этого уравнения:  $x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Ответ:  $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**140а)** Используя известную формулу, запишем решения уравнения  $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ . Имеем:  $x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n = -\frac{\pi}{6} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Ответ:  $-\frac{\pi}{6} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**141б)** Из уравнения  $\operatorname{ctg} x + 1 = 0$  выразим  $\operatorname{ctg} x = -1$ . Используя известную формулу, запишем решения этого уравнения:  $x = \operatorname{arccotg}(-1) + \pi n = \frac{3}{4}\pi + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Ответ:  $\frac{3}{4}\pi + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**142б)** Для решения уравнения  $\cos \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$  введем новую неизвестную  $t = \frac{x}{3}$ . Получаем уравнение  $\cos t = -\frac{1}{2}$ . Выпишем его решения  $t = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Вернемся

к старой неизвестной  $x$ . Получаем линейное уравнение  $\frac{x}{3} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ . Умножим обе части этого уравнения на 3 и найдем  $x = \pm 2\pi + 6\pi n$ . Ответ:  $x = \pm 2\pi + 6\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**145а)** Для решения уравнения  $2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{6}\right) = \sqrt{3}$  введем новую неизвестную  $t = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}$ . Получаем уравнение  $2\cos t = \sqrt{3}$ , откуда  $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Выпишем его решения  $t = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Получаем линейное уравнение:  $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ , тогда  $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$  и  $x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} + 4\pi n$ . Ответ:  $x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} + 4\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**146б)** Для решения уравнения  $2\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}$  введем новую неизвестную  $t = \frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}$ . Получаем уравнение  $2\sin t = \sqrt{3}$ , откуда  $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Выпишем его решения  $t = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n = (-1)^n \times \frac{\pi}{3} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Получаем линейное уравнение:  $\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4} = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n$ . Вычтем из обеих частей этого уравнения число  $\frac{\pi}{3}$ . Получаем:  $-\frac{x}{4} = -\frac{\pi}{3} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n$ . Умножим обе части уравнения на число  $(-4)$  и найдем  $x = \frac{4\pi}{3} - (-1)^n \cdot \frac{4\pi}{3} + 4\pi n = \frac{4\pi}{3} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{4\pi}{3} + 4\pi n$ .

Ответ:  $\frac{4\pi}{3} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{4\pi}{3} + 4\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**147а)** Для решения уравнения  $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  преобразуем его левую часть, используя формулу для синуса разности двух углов. Получаем:  $\sin(3x - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  или  $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Выпишем решения этого уравнения:  $2x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Разделив на 2, найдем  $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} n$ .

Ответ:  $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**1476)** Для решения уравнения  $\sin^2 \frac{x}{4} - \cos^2 \frac{x}{4} = 1$  используем формулу для косинуса двойного аргумента. Получаем:  $-\left(\cos^2 \frac{x}{4} - \sin^2 \frac{x}{4}\right) = 1$  или  $-\cos \frac{x}{2} = 1$ , откуда  $\cos \frac{x}{2} = -1$ . Запишем решения этого уравнения:  $\frac{x}{2} = \pi + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Умножим обе части этого равенства на 2 и найдем  $x = 2\pi + 4\pi n$ .

Ответ:  $x = 2\pi + 4\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**148а)** Так как абсцисса искомой точки известна  $x = 4,5\pi$ , то найдем ординату этой точки, подставив это значение в уравнение

функции. Для  $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  получаем:

$$y(4,5\pi) = 2\cos\left(2 \cdot 4,5\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(9\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(8\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -2\cos\frac{\pi}{3} = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1. \text{ Для } y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ имеем:}$$

$$y(4,5\pi) = \sin\left(\frac{4,5\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2\frac{1}{4}\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(2,5\pi) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1. \text{ Итак, искомые точки имеют координаты } (4,5\pi; -1) \text{ и } (4,5\pi; 1). \text{ Ответ: } (4,5\pi; -1), (4,5\pi; 1).$$

**148б)** Так как ордината искомой точки известна  $y = -1$ , то найдем абсциссу этой точки, подставив это значение в уравнение функции.

Для  $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  получаем уравнение:  $-1 = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  или  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ , откуда  $2x - \frac{\pi}{3} = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pm \frac{2\pi}{3} +$

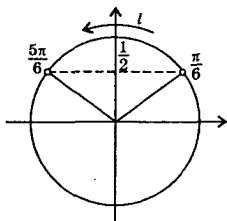
$+ 2\pi n$ . Тогда  $2x = \frac{\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$  и  $x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$ . Для  $y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$  имеем уравнение:  $-1 = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ , откуда  $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ . Тогда

$\frac{x}{2} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$  и  $x = -\frac{3\pi}{2} + 4\pi n$ . Таким образом, координаты иско-

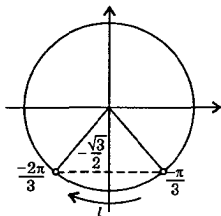
мых точек  $\left(\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + \pi n; -1\right)$  и  $\left(-\frac{3\pi}{2} + 4\pi n; -1\right)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $\left(\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + \pi n; -1\right), \left(-\frac{3\pi}{2} + 4\pi n; -1\right)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

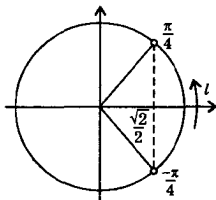
**151а)** На тригонометрическом круге по оси синусов (вертикальная ось) отложим значение  $\frac{1}{2}$ . Построим углы  $t$ , для которых  $\sin t = \frac{1}{2}$ . Это угол  $t_1 = \frac{\pi}{6}$  и  $t_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ . Множество точек окружности, для которых  $\sin t > \frac{1}{2}$ , отмечено буквой  $l$ . Из рисунка видно, что неравенству  $\sin t > \frac{1}{2}$  на промежутке  $t \in [0; \pi]$  удовлетворяют значения  $t \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ . Ответ:  $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ .



**151б)** Для решения неравенства  $\sin t \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$  на тригонометрическом круге по оси синусов (вертикальная ось) отложим значение  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . Построим углы  $t$ , для которых  $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Это угол  $t_1 = -\frac{\pi}{3}$  и  $t_2 = -\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2\pi}{3}$ . Множество точек окружности, для которых  $\sin t \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , отмечено буквой  $l$ . Из рисунка видно, что неравенству  $\sin t \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$  на промежутке  $t \in [-\pi; 0]$  удовлетворяют значения  $t \in \left[-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\right]$ . Ответ:  $\left[-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\right]$ .

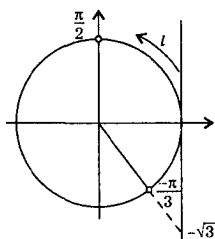


**152а)** Для решения неравенства  $\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}$  на тригонометрическом круге по оси косинусов (горизонтальная ось) отложим значение  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Построим углы  $t$ , для которых  $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Это углы  $t_1 = -\frac{\pi}{4}$  и  $t_2 = \frac{\pi}{4}$ .



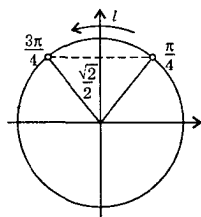
Множество точек окружности, для которых  $\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}$ , отмечено буквой  $l$ . Из рисунка видно, что неравенству  $\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}$  на промежутке  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  удовлетворяют значения  $t \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ .

Ответ:  $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ .



**153а)** Для решения неравенства  $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$  на тригонометрическом круге по оси тангенсов (вспомогательная вертикальная ось) отложим значение  $(-\sqrt{3})$ . Построим угол  $t$ , для которого  $\operatorname{tg} t = -\sqrt{3}$ . Это угол  $t = -\frac{\pi}{3}$ . Множество точек окружности, для которых  $\operatorname{tg} t > -\sqrt{3}$  отмечено буквой  $l$ . Из рисунка видно, что неравенству  $\operatorname{tg} t >$

$-\sqrt{3}$  на промежутке  $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  удовлетворяют значения  $t \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ . Ответ:  $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ .



**154а)** Сначала решим неравенство  $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$  на промежутке  $x \in [0; 2\pi]$ . На тригонометрическом круге по оси синусов (вертикальная ось) отложим значение  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Построим углы, для которых  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Эти углы  $x_1 = \frac{\pi}{4}$  и  $x_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ . Множество точек,

для которых  $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , отмечено буквой  $l$ . Из рисунка видно, что неравенству  $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$  на промежутке  $x \in [0; 2\pi]$  удовлетворяют значения  $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ . Учтем периодичность функции  $\sin x$  и по-

лучим  $x \in \left[ \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $\left[ \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**157в)** Запишем данное неравенство  $2\cos x - \sqrt{3} \leq 0$  в виде  $2\cos x \leq \sqrt{3}$ . Разделим обе части неравенства на положительное

число 2. При этом знак неравенства сохраняется:  $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Сна-

чала решим это неравенство на промежутке  $x \in [0; 2\pi]$ . На тригонометрическом круге отложим по оси косинусов (горизонтальная

ось) значение  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Построим углы  $x$ , для ко-

торых  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Это углы  $x_1 = \frac{\pi}{3}$  и  $x_2 =$

$= 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ . Множество точек окружнос-

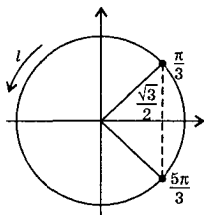
ти, для которых  $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ , отмечено буквой  $l$ . Из рисунка видно,

что неравенству  $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  на промежутке  $[0; 2\pi]$  удовлетворяют

значения  $x \in \left[ \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right]$ . Учтем периодичность функции  $\cos x$  и по-

лучим  $x \in \left[ \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n \right]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $\left[ \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n \right]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .



**159в)** Для решения неравенства  $\sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \geq 1$  введем но-

вую неизвестную  $t = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$  и получим нера-

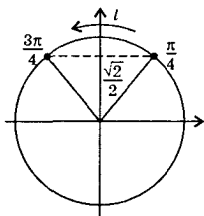
венство  $\sqrt{2} \sin t \geq 1$ . Разделим обе части на

положительное число  $\sqrt{2}$ . При этом знак

неравенства сохраняется:  $\sin t \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Снача-

ла решим это неравенство на промежутке

$t \in [0; 2\pi]$ . На тригонометрическом круге



значение  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Построим углы  $t$ , для которых  $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Это углы  $t_1 = \frac{\pi}{4}$  и  $t_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ . Множество точек окружности, для которых  $\sin t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , отмечено буквой  $l$ . Из рисунка видно, что неравенству  $\sin t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$  на промежутке  $[0; 2\pi]$  удовлетворяют значения

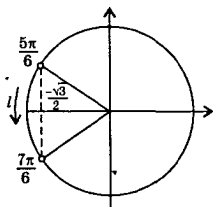
$$t \in \left[ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]. \text{ Учтем периодичность функции } \sin t \text{ и получим } t \in \left[ \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right], \text{ где } n \in \mathbb{Z}. \text{ Теперь вернемся к неизвестной } x.$$

Получаем двойное линейное неравенство  $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ .

Из всех частей неравенства вычтем число  $\frac{\pi}{4}$ . Имеем:  $2\pi n \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ . Умножим все члены неравенства на положительное число 2. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем:  $4\pi n \leq x \leq \pi + 4\pi n$  или  $x \in [4\pi n; \pi + 4\pi n]$ .

Ответ:  $[4\pi n; \pi + 4\pi n]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**160г)** Используя формулу для косинуса суммы двух углов, преобразуем левую часть неравенства  $\cos \frac{\pi}{8} \cos x - \sin x \sin \frac{\pi}{8} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

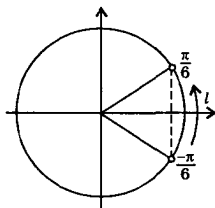


Получаем:  $\cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Введем новую неизвестную  $t = x + \frac{\pi}{8}$ . Имеем неравенство  $\cos t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Сначала решим это неравенство на промежутке  $t \in [0; 2\pi]$ . На тригонометрическом круге по оси косинусов (горизонтальная ось) отложим значение

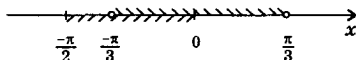
значение  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . Построим углы  $t$ , для которых  $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Это углы  $t_1 = \frac{5\pi}{6}$  и  $t_2 = \frac{7\pi}{6}$ . Множество точек окружности, для которых  $\cos t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , отмечено буквой  $l$ . Из рисунка видно, что неравенству

$\cos t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$  на промежутке  $[0; 2\pi]$  удовлетворяют значения  $t \in \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right)$ . Учтем периодичность функции  $\cos t$  и получим  $t \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Теперь вернемся к неизвестной  $x$ . Получаем двойное неравенство  $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x + \frac{\pi}{8} < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$ . Из всех частей неравенства вычтем число  $\frac{\pi}{8}$  и получим  $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{8} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{8} + 2\pi n$  или  $\frac{17\pi}{24} + 2\pi n < x < \frac{25\pi}{24} + 2\pi n$  или  $x \in \left(\frac{17\pi}{24} + 2\pi n; \frac{25\pi}{24} + 2\pi n\right)$ . Ответ:  $\left(\frac{17\pi}{24} + 2\pi n; \frac{25\pi}{24} + 2\pi n\right)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**1636)** Для решения неравенства  $\cos \frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$  на промежутке  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$  введем новую неизвестную  $t = \frac{x}{2}$ . Получаем неравенство  $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$  и решим его на промежутке  $t \in [-\pi; \pi]$ . На тригонометрическом круге по оси косинусов (горизонтальная ось) отложим значение  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Построим углы  $t$ , для которых  $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Это углы  $t_1 = -\frac{\pi}{6}$  и  $t_2 = \frac{\pi}{6}$ . Множество точек окружности,



для которых  $\cos t > \frac{\sqrt{3}}{2}$ , отмечено буквой  $l$ . Из рисунка видно, что неравенству  $\cos t > \frac{\sqrt{3}}{2}$  на промежутке  $[-\pi; \pi]$  удовлетворяют значения  $t \in \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$ . Вернемся к неизвестной  $x$  и получим двойное линейное неравенство  $-\frac{\pi}{6} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{6}$ . Умножим все члены неравенства



на положительное число 2. При этом знак неравенства сохраняется. Имеем:  $-\frac{\pi}{6} \cdot 2 < \frac{x}{2} \cdot 2 < \frac{\pi}{6} \cdot 2$  или  $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ . Теперь из найденного решения выберем значения  $x$ , принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ . Из диаграммы видно, что такими значениями являются  $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; 0\right]$ . Ответ:  $\left[-\frac{\pi}{3}; 0\right]$ .

**1646)** Для решения уравнения  $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$  введем новую неизвестную  $t = \sin x$ . Получаем квадратное уравнение  $3t^2 - 5t - 2 = 0$ , корни которого  $t_1 = -\frac{1}{3}$  и  $t_2 = 2$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем уравнения:  $\sin x = -\frac{1}{3}$  (его решения  $x = (-1)^n \times \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{3} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ) и  $\sin x = 2$  (решений не имеет, т.к. функция  $\sin x$  ограничена, т.е.  $|\sin x| \leq 1$ ).

Ответ:  $(-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{3} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**166a)** При решении уравнения  $2\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$  найдем связь между величинами  $\cos x$  и  $\sin x$ , используя основное тригонометрическое тождество:  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ . Получаем уравнение:  $2(1 - \sin^2 x) + \sin x + 1 = 0$  или  $0 = 2\sin^2 x - \sin x - 1$ . Введем новую неизвестную  $t = \sin x$ . Имеем квадратное уравнение  $0 = 2t^2 - t - 1$ , корни которого  $t_1 = 1$  и  $t_2 = -\frac{1}{2}$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ .

Получаем уравнения:  $\sin x = 1$  (его решения  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ )

и  $\sin x = -\frac{1}{2}$  (его решения  $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k = (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ;  $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

**167a)** Для решения уравнения  $3\tg^2 x + 2\tg x - 1 = 0$  введем новую неизвестную  $t = \tg x$  и получим квадратное уравнение  $3t^2 + 2t - 1 = 0$ , корни которого  $t_1 = -1$  и  $t_2 = \frac{1}{3}$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем уравнения:  $\tg x = -1$  (его решения  $x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ) и  $\tg x = \frac{1}{3}$  (его решения  $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ). Ответ:  $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

**1676)** Для решения уравнения  $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + 1 = 0$  учтем, что  $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ . Получаем уравнение:  $\operatorname{tg} x - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + 1 = 0$  или  $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$ . Введем новую неизвестную  $t = \operatorname{tg} x$  и получим квадратное уравнение  $t^2 + t - 2 = 0$ , корни которого  $t_1 = 1$  и  $t_2 = -2$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем уравнения:  $\operatorname{tg} x = 1$  (его решения  $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n = \frac{\pi}{4} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ) и  $\operatorname{tg} x = -2$  (его решения  $x = \operatorname{arctg} (-2) + \pi k = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Ответ:  $\frac{\pi}{4} + \pi n, -\operatorname{arctg} 2 + \pi k$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

**168а)** При решении уравнения  $2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x = 0$  разложим его левую часть на множители  $\cos x (2 \cos x + \sqrt{3}) = 0$ . Так как произведение двух множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Имеем уравнения:  $\cos x = 0$  (его решения  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ) и  $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$  (т.е.  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  и его решения  $x = \pm \arccos \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2\pi k = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Ответ:  $\frac{\pi}{2} + \pi n, \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

**169а)** Для решения однородного уравнения  $3 \sin^2 x + \sin x \times \cos x = 2 \cos^2 x$  учтем, что  $\cos x \neq 0$ . Проверим это. Если  $\cos x = 0$ , то подставим эту величину в данное уравнение:  $3 \sin^2 x + \sin x \cdot 0 = 2 \cdot 0^2$  или  $3 \sin^2 x = 0$ , откуда  $\sin x = 0$ . Очевидно, что не существует такого значения  $x$ , для которого и  $\cos x = 0$  и  $\sin x = 0$ . Так как  $\cos x \neq 0$ , то разделим все члены данного уравнения на  $\cos^2 x$ . Получаем уравнение:  $3 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} = 2 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}$  или  $3 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 2$ . Введем новую неизвестную  $t$  и получим квадратное уравнение  $3t^2 + t - 2 = 0$  или  $3t^2 + t - 2 = 0$ , корни которого  $t_1 = -1$  и  $t_2 = \frac{2}{3}$ . Вернемся к неизвестной  $x$ . Имеем уравнения:  $\operatorname{tg} x = -1$  (его решения  $x = \operatorname{arctg} (-1) + \pi n = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ) и  $\operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$  (его решения  $x = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Ответ:  $-\frac{\pi}{4} + \pi n; \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi k$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

**170а)** При решении уравнения  $4\sin^2 x - \sin 2x = 3$  используем формулу для синуса двойного угла и основное тригонометрическое тождество. Имеем уравнение:  $4\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x)$  или  $4\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x$  или  $\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$ . Проверим, что значение  $\cos x = 0$  не является решением этого уравнения. При подстановке в данное уравнение получаем:  $\sin^2 x - 2\sin x \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 = 0$  или  $\sin^2 x = 0$ , откуда  $\sin x = 0$ . Очевидно, что не существует величины  $x$ , для которой одновременно и  $\sin x = 0$  и  $\cos x = 0$ . Разделим все члены уравнения на  $\cos^2 x$  и получим:  $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 2 \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - 3 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$  или  $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$ . Введем новую неизвестную  $t = \operatorname{tg} x$  и получим квадратное уравнение  $t^2 - 2t - 3 = 0$ , корни которого  $t_1 = -1$  и  $t_2 = 3$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем уравнения:  $\operatorname{tg} x = -1$  (его решения  $x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ) и  $\operatorname{tg} x = 3$  (решения  $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Ответ:  $-\frac{\pi}{4} + \pi n$ ;  $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

**170б)** Для решения уравнения  $\cos 2x = 2\cos x - 1$  запишем его в виде  $(1 + \cos 2x) - 2\cos x = 0$  и используем формулу половинного аргумента:  $2\cos^2 x - 2\cos x = 0$ . Разделим все члены уравнения на число 2 и разложим его левую часть на множители:  $\cos x (\cos x - 1) = 0$ . Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Получаем уравнения:  $\cos x = 0$  (его решения  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ) и  $\cos x - 1 = 0$  (т.е.  $\cos x = 1$  и его решения  $x = 2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Ответ:  $\frac{\pi}{2} + \pi n$ ;  $2\pi k$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

**171а)** Для решения уравнения  $2\sin^2 x = \sqrt{3} \sin 2x$  используем формулу для синуса двойного аргумента:  $2\sin^2 x = \sqrt{3} \cdot 2\sin x \cos x$ . Перенесем все члены в левую часть уравнения и разложим ее на множители:  $2\sin x (\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 0$ . Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Получаем два уравнения.

а)  $\sin x = 0$ , его решения  $x = \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

б)  $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$ . Разделим все члены этого однородного уравнения на  $\cos x$  (легко проверить, что  $\cos x \neq 0$ ):  $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$  или  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ , его решения  $x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k = \frac{\pi}{3} + \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $\pi n$ ;  $\frac{\pi}{3} + \pi k$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

**172а)** При решении уравнения  $\sin 2x + 2\cos 2x = 1$  используем формулы для синуса и косинуса двойного аргумента и основное тригонометрическое тождество. Получаем:  $2\sin x \cos x + 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin^2 x + \cos^2 x$  или  $0 = 3\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x$ . Разделим все члены этого однородного уравнения на  $\cos^2 x$  (проверьте, что  $\cos x \neq 0$ ):  $0 = 3\tg^2 x - 2\tg x - 1$ . Введем новую неизвестную  $t = \tg x$  и получим квадратное уравнение:  $0 = 3t^2 - 2t - 1$ , корни которого  $t_1 = 1$  и  $t_2 = -\frac{1}{3}$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем

уравнения:  $\tg x = 1$  (его решения  $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n = \frac{\pi}{4} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ )

и  $\tg x = -\frac{1}{3}$  (решения  $x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k = -\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Ответ:  $\frac{\pi}{4} + \pi n$ ;  $-\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

**172б)** Для решения уравнения  $\sin^4 \frac{x}{4} - \cos^4 \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$  разложим его левую часть на множители и используем формулу для косинуса двойного аргумента и основное тригонометрическое тождество. Получаем:

ем:  $\left(\sin^2 \frac{x}{4} + \cos^2 \frac{x}{4}\right)\left(\sin^2 \frac{x}{4} - \cos^2 \frac{x}{4}\right) = \frac{1}{2}$  или  $\sin^2 \frac{x}{4} - \cos^2 \frac{x}{4} = -\frac{1}{2}$

или  $\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$ . Решения этого уравнения  $\frac{x}{2} = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) +$

$+ 2\pi n = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$  (где  $n \in \mathbb{Z}$ ), тогда  $x = \pm \frac{4\pi}{3} + 4\pi n$ .

Ответ:  $x = \pm \frac{4\pi}{3} + 4\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**173а)** При решении уравнения  $\sin 4x + \sin^2 2x = 0$  используем формулу для синуса двойного аргумента и разложим левую часть на множители:  $2\sin 2x \cos 2x + \sin^2 2x = 0$  или  $\sin 2x (2\cos 2x + \sin 2x) = 0$ . Так как произведение двух множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем два уравнения.

а)  $\sin 2x = 0$ , его решения  $2x = \pi n$  (где  $n \in \mathbb{Z}$ ), откуда  $x = \frac{\pi}{2} n$ .

б)  $2\cos 2x + \sin 2x = 0$ . Разделим все члены этого однородного уравнения на  $\cos 2x$  (проверьте, что  $\cos 2x \neq 0$ ) и получим:  $2 + \tg 2x = 0$  или  $\tg 2x = -2$ . Решения этого уравнения  $2x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi k = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k$  (где  $k \in \mathbb{Z}$ ), откуда  $x = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{2} k$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{2} n$ ;  $-\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{2} k$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

**1736)** Для решения уравнения  $\frac{3}{5\operatorname{tg} x + 8} = 1$  умножим обе его части на знаменатель дроби. Получаем:  $3 = 5\operatorname{tg} x + 8$  или  $-5 = 5\operatorname{tg} x$ , откуда  $\operatorname{tg} x = -1$ . Решения этого уравнения  $x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Ответ:  $-\frac{\pi}{4} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**174а)** При решении уравнения  $\cos 5x - \cos 3x = 0$  преобразуем его левую часть в произведение:  $-2\sin \frac{5x-3x}{2} \sin \frac{5x+3x}{2} = 0$  или  $\sin x \sin 4x = 0$ . Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Получаем уравнения:  $\sin x = 0$  (его решения  $x = \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ) и  $\sin 4x = 0$  (решения  $4x = \pi k$  (где  $k \in \mathbb{Z}$ ), откуда  $x = \frac{\pi}{4} k$ ). Легко видеть, что решения  $x = \frac{\pi}{4} k$  включают в себя решения  $x = \pi n$  (при  $k$  кратных 4, т.е.  $k = 4n$ ).

Ответ:  $\frac{\pi}{4} k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

**174б)** Для решения уравнения  $\sin 7x - \sin x = \cos 4x$  преобразуем его левую часть в произведение:  $2\sin \frac{7x-x}{2} \cos \frac{7x+x}{2} = \cos 4x$  или  $2\sin 3x \cos 4x = \cos 4x$ . Перенесем все члены уравнения в левую часть и вновь разложим ее на множители:  $2\sin 3x \cos 4x - \cos 4x = 0$  или  $\cos 4x (2\sin 3x - 1) = 0$ . Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Получаем уравнения:  $\cos 4x = 0$  (его решения  $4x = \frac{\pi}{2} + \pi n$  (где  $n \in \mathbb{Z}$ ), откуда  $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n$ ) и  $2\sin 3x - 1 = 0$  (т.е.  $\sin 3x = \frac{1}{2}$ , его решения  $3x = (-1)^k \times \arcsin \frac{1}{2} + \pi k = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$  (где  $k \in \mathbb{Z}$ ), откуда  $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} k$ ).

Ответ:  $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n$ ;  $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} k$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

**175а)** Для решения системы уравнений  $\begin{cases} x + y = \pi \\ \cos x - \cos y = 1 \end{cases}$  из первого уравнения выразим  $y = \pi - x$  и подставим во второе уравнение. Получаем:  $\cos x - \cos(\pi - x) = 1$  или  $\cos x - (-\cos x) = 1$  или  $2\cos x = 1$ , откуда  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Решения этого уравнения  $x = \pm \arccos \frac{1}{2} +$

$$+ 2\pi n = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}. \text{ Теперь найдем } y = \pi - \left( \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right) = \\ = \pi \mp \frac{\pi}{3} - 2\pi n = \mp \frac{\pi}{3} - \pi(2n - 1).$$

Ответ:  $\left( \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \mp \frac{\pi}{3} - \pi(2n - 1) \right)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**175б)** При решении системы уравнений 
$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \\ \cos^2 x + \sin^2 y = 2 \end{cases} \quad \text{из}$$

первого уравнения выразим  $x = \frac{\pi}{2} + y$  и подставим во второе уравнение. Получаем:  $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + \sin^2 y = 2$  или  $\sin^2 y + \sin^2 y = 2$  или  $\sin^2 y = 1$ , откуда  $\sin y = \pm 1$ . Решения этих уравнений  $y = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Найдем  $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi n = \pi + \pi n$ .

Ответ:  $(\pi + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**176а)** Для решения системы уравнений 
$$\begin{cases} \sin x - \cos y = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 2 \end{cases} \quad \text{введем}$$

новые неизвестные  $a = \sin x$  и  $b = \cos y$ . Получаем систему алгебраических уравнений 
$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}$$
. Из первого уравнения выразим  $b = a$  и подставим во второе уравнение:  $a^2 + a^2 = 2$  или  $a^2 = 1$ , откуда  $a = \pm 1$ . Тогда и  $b = \pm 1$ . Получаем две системы уравнений.

а)  $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos y = 1 \end{cases}$ , откуда 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ y = 2\pi k \end{cases}, \text{ где } n, k \in \mathbb{Z}.$$

б)  $\begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos y = -1 \end{cases}$ , откуда 
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ y = \pi + 2\pi k \end{cases}.$$

Ответ:  $\left( \frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi k \right), \left( -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi k \right)$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

**176б)** Для решения системы уравнений 
$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6} \end{cases} \quad \text{из первого}$$

уравнения выразим  $y = \frac{\pi}{4} - x$  и подставим во второе уравнение:

$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{1}{6}$ . Используем формулу для тангенса разности двух углов:  $\operatorname{tg} x \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} x} = \frac{1}{6}$  или  $\operatorname{tg} x \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{1}{6}$ . Умножим обе части уравнения на  $6(1 + \operatorname{tg} x)$ . Получаем:  $6\operatorname{tg} x (1 - \operatorname{tg} x) = 1 \cdot (1 + \operatorname{tg} x)$  или  $6\operatorname{tg} x - 6\operatorname{tg}^2 x = 1 + \operatorname{tg} x$  или  $0 = 6\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 1$ . Введем новую неизвестную  $t = \operatorname{tg} x$ . Имеем квадратное уравнение  $0 = 6t^2 - 5t + 1$ , корни которого  $t_1 = \frac{1}{3}$  и  $t_2 = \frac{1}{2}$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Получаем уравнения:  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$  (его решения  $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ) и  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$  (решения  $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ). Теперь найдем  $y = \frac{\pi}{4} - x$ . Тогда имеем:  $y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \pi n$  и  $y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \pi k$ .

Ответ:  $\left( \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n; \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \pi n \right)$ ,  
 $\left( \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \pi k \right)$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

## Глава II. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

### § 4. Производная

**1786)** Найдем приращение  $\Delta f$  функции  $f(x) = 2x^2 - 3$  в точке  $x_0$ . По определению приращения  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (2(x_0 + \Delta x)^2 - 3) - (2x_0^2 - 3) = (2x_0^2 + 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3) - (2x_0^2 - 3) = 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2$ . Теперь найдем эту величину для  $x_0 = 3$  и  $\Delta x = -0,2$ :  $\Delta f = 4 \cdot 3 \cdot (-0,2) + 2 \cdot (-0,2)^2 = -2,4 + 0,08 = -2,32$ . Ответ:  $-2,32$ .

**1796)** Найдем приращения  $\Delta x$  и  $\Delta f$  для функции  $f(x) = 4x - x^2$ . Приращение  $\Delta x = x - x_0 = 2,6 - 2,5 = 0,1$ . Приращение  $\Delta f = f(x) - f(x_0) = (4x - x^2) - (4x_0 - x_0^2) = (4x - 4x_0) - (x^2 - x_0^2) = 4(x - x_0) - (x - x_0)(x + x_0) = (x - x_0)(4 - x - x_0)$ . Найдем эту величину для  $x = 2,6$  и  $x_0 = 2,5$ . Получаем  $\Delta f = (2,6 - 2,5)(4 - 2,6 - 2,5) = 0,1 \times (-1,1) = -0,11$ . Ответ:  $\Delta x = 0,1$ ;  $\Delta f = -0,11$ .

**180а)** Выразим приращение функции  $f(x) = 1 - 3x^2$  в точке  $x_0$  через  $x_0$  и  $\Delta x$ . По определению приращения функций имеем:  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 1 - 3(x_0 + \Delta x)^2 - (1 - 3x_0^2) = 1 - 3x_0^2 - 6x_0\Delta x - 3(\Delta x)^2 - 1 + 3x_0^2 = -6x_0\Delta x - 3(\Delta x)^2 = -3\Delta x(2x_0 + \Delta x)$ .

Ответ:  $-3\Delta x(2x_0 + \Delta x)$ .

**1816)** Средняя скорость автобуса — отношение приращения пройденного пути к приращению времени, за которое оно произошло. За время от  $t_1 = 3$  ч до  $t_2 = 5$  ч (приращение времени  $\Delta t = t_2 - t_1 = 5 - 3 = 2$  ч) пройденный путь изменился от  $S_1 = 150$  км до  $S_2 = 280$  км (приращение пути  $\Delta S = S_2 - S_1 = 280 - 150 = 130$  км). Тогда средняя скорость  $v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = 65$  км/ч. Ответ: 65 км/ч.

**182а)** Координата  $x$  точки меняется со временем по закону  $x(t) = 3 + 12t - t^2$ . В момент времени  $t_1 = 2$  координата точки  $x(2) = 3 + 12 \cdot 2 - 2^2 = 23$ , в момент времени  $t_2 = 2,5$  координата  $x(2,5) = 3 + 12 \cdot 2,5 - 2,5^2 = 26,75$ . Следовательно, за время  $t_2 - t_1 = 0,5$  координата точки изменилась на величину  $x(2,5) - x(2) = 26,75 - 23 = 3,75$ . Так как приращение координаты положительно, то точка удаляется от начала координат. Средняя скорость тела за этот промежуток времени  $v = \frac{x(2,5) - x(2)}{t_2 - t_1} = \frac{3,75}{0,5} = 7,5$ .

Ответ: см. решение.

**184а)** Для функции  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$  найдем приращение функции при изменении  $x$  от величины  $x_1$  до  $x_2$ . Получаем:  $\Delta f = f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2 = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}$ . Приращение аргумента при этом  $\Delta x = x_2 - x_1 = 1 - 0 = 1$ . Тогда угловой коэффициент секущей  $k = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$ . Так как  $k > 0$ , то секущая образует острый угол с осью  $OX$ . Ответ:  $k = \frac{1}{2}$ , острый угол.

**185)** Куб имеет шесть граней, площадь каждой из них равна  $x^2$ . Тогда площадь полной поверхности куба  $S(x) = 6x^2$ . Пусть ребро куба  $x$  получило приращение  $\Delta x$ . Найдем приращение полной поверхности куба:  $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x) = 6(x + \Delta x)^2 - 6x^2 = 6((x + \Delta x)^2 - x^2) = 6(x + \Delta x + x)(x + \Delta x - x) = 6(2x + \Delta x)\Delta x$ .

Ответ:  $6(2x + \Delta x)\Delta x$ .

**186а)** Для функции  $f(x) = -x^3 + 3x$  найдем ее приращение:  $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = -(x + \Delta x)^3 + 3(x + \Delta x) - (-x^3 + 3x) = (x^3 - (x + \Delta x)^3) + 3(x + \Delta x - x) = (x - x - \Delta x)(x^2 + x(x + \Delta x) + (x + \Delta x)^2) + 3\Delta x = -\Delta x \cdot (x^2 + x^2 + x \cdot \Delta x + x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) + 3\Delta x = -\Delta x \cdot (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) + 3\Delta x = -\Delta x(3x^2 - 3 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)$ . Также легко найти отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x (3x^2 - 3 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = -3x^2 + 3 - 3x\Delta x - (\Delta x)^2.$$

**Ответ:**  $\Delta f = -\Delta x (3x^2 - 3 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)$ ,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = -3x^2 + 3 - 3x\Delta x - (\Delta x)^2.$$

**1866)** Для функции  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$  найдем ее приращение

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{(x + \Delta x)^2 - 1} - \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 - ((x + \Delta x)^2 - 1)}{((x + \Delta x)^2 - 1)(x^2 - 1)} = \frac{x^2 - (x + \Delta x)^2}{((x + \Delta x)^2 - 1)(x^2 - 1)} = \\ &= \frac{(x + x + \Delta x)(x - x - \Delta x)}{((x + \Delta x)^2 - 1)(x^2 - 1)} = \frac{-\Delta x(2x + \Delta x)}{((x + \Delta x)^2 - 1)(x^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Теперь найдем отношение приращения функции к приращению

аргумента  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x(2x + \Delta x)}{((x + \Delta x)^2 - 1)(x^2 - 1)\Delta x} = \frac{-2x - \Delta x}{((x + \Delta x)^2 - 1)(x^2 - 1)}.$

**Ответ:**  $\Delta f = \frac{-\Delta x(2x + \Delta x)}{((x + \Delta x)^2 - 1)(x^2 - 1)}, \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-2x - \Delta x}{((x + \Delta x)^2 - 1)(x^2 - 1)}.$

**187а)** Для нахождения средней скорости точки определим для координаты  $x(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$  приращение координаты за промежуток времени  $[t_0; t_0 + \Delta t]$ :  $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = v_0(t_0 + \Delta t) -$

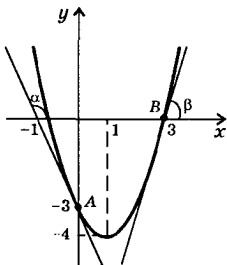
$$\begin{aligned} &- \frac{g(t_0 + \Delta t)^2}{2} - \left( v_0 t_0 - \frac{gt_0^2}{2} \right) = (v_0(t_0 + \Delta t) - v_0 t_0) + \left( \frac{gt_0^2}{2} - \frac{g(t_0 + \Delta t)^2}{2} \right) = \\ &= v_0(t_0 + \Delta t - t_0) + \frac{g}{2}(t_0 + t_0 + \Delta t)(t_0 - t_0 - \Delta t) = v_0 \Delta t + \frac{g}{2}(2t_0 + \Delta t)(-\Delta t) = \\ &= \Delta t \left( v_0 - \frac{g}{2}(2t_0 + \Delta t) \right). \end{aligned}$$

Теперь легко найти среднюю скорость точки  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_0 - gt_0 - \frac{g}{2} \Delta t.$  **Ответ:**  $v_0 - gt_0 - \frac{g}{2} \Delta t.$

**188а)** Схематично изобразим график функции  $f(x) = x^2 - 2x - 3$ . Это парабола, направленная ветвями вверх, пересекающая ось абсцисс в точках  $x_1 = -1$  и  $x_2 = 3$  и ось ординат — в точке  $y = -3$ . Вершина параболы имеет координаты  $x_v = 1$  и  $y_v = -4$ . Если провести касательную к параболе в точке  $A$  с абсциссой  $x_0 = 0$ , то касатель-

ная образует тупой угол  $\alpha$  с осью абсцисс и угловой коэффициент  $k = \operatorname{tg} \alpha < 0$ . Если провести касательную к параболе в точке  $B$  с абсциссой  $x_0 = 3$ , то касательная образует острый угол  $\beta$  с осью абсцисс и угловой коэффициент  $k = \operatorname{tg} \beta > 0$ .

**Ответ:** см. решение.



**189а)** Рассмотрим рис. 85,а учебника. В точке  $x_1$  касательная образует тупой угол с осью абсцисс и угловой коэффициент ее отрицательный. В точке  $x_4$  касательная образует острый угол с осью абсцисс и ее угловой коэффициент положительный. В точках  $x_2$  и  $x_3$  касательных к графику функции не существует. В окрестностях точек  $x_1$  и  $x_4$  график функции является “гладкой” кривой. **Ответ:** см. решение.

**191а)** Сначала для функции  $f(x) = 2x^2$  найдем приращение функции  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2(x_0 + \Delta x)^2 - 2x_0^2 = 2((x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2) = 2(x_0 + \Delta x - x_0)(x_0 + \Delta x + x_0) = 2\Delta x(2x_0 + \Delta x)$ . Вычислим величину

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2(2x_0 + \Delta x) = 4x_0 + 2\Delta x. \text{ Для точки } x_0 = 1 \text{ полу-}$$

чим  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 4 \cdot 1 + 2\Delta x = 4 + 2\Delta x$ . Подставляя соответственно значения  $\Delta x = 0,5; 0,1; 0,01$ , найдем  $\frac{\Delta f}{\Delta x}: 4 + 2 \cdot 0,5 = 5; 4 + 2 \cdot 0,1 = 4,2; 4 + 2 \cdot 0,01 = 4,02$ . **Ответ:** 5; 4,2; 4,02.

**192б)** Чтобы найти отношение  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , подставим значение  $\Delta x = 0$  в это отношение. Получим  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0 \cdot 0 + 0^2 = 3x_0^2$ . При  $x_0 = 1$  эта величина равна  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3 \cdot 1^2 = 3$ , при  $x_0 = -21$  имеем  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3 \cdot (-21)^2 = 3 \cdot 441 = 1323$ .

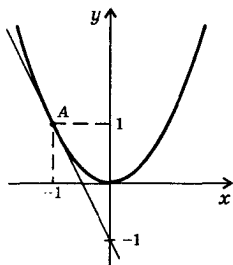
**Ответ:** 3; 1323.

**193а)** Учтем, что производная функции  $f(x) = x^3$  равна  $f'(x) = 3x^2$ . Найдем значение этой производной в точке  $x_0$ :  $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$  и  $f'(-1,5) = 3 \cdot (-1,5)^2 = 3 \cdot 2,25 = 6,75$ . **Ответ:** 12; 6,75.

**193б)** Учтем, что производная линейной функции  $f(x) = 4 - 2x$  равна  $f'(x) = -2$ . Эта производная величина постоянная и не зависит от величины  $x_0$ . Поэтому  $f'(0,5) = -2$  и  $f'(-3) = -2$ .

**Ответ:** -2; -2.

**194а)** Для функции  $f(x) = x^2 - 3x$  найдем производную  $f'(x)$ , пользуясь определением производной. Сначала найдем приращение функции:  $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) - (x^2 - 3x) = ((x + \Delta x)^2 - x^2) - 3(x + \Delta x - x) = (x + \Delta x + x)(x + \Delta x - x) - 3\Delta x = (2x + \Delta x)\Delta x - 3\Delta x = \Delta x(2x + \Delta x - 3)$ . Найдем отношение  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x - 3 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x - 3 + \Delta x$ . Теперь найдем величину  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Для этого подставим значение  $\Delta x = 0$  в выражение для  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ . Получаем  $\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow 2x - 3 + 0 = 2x - 3$ . Это и есть производная данной функции  $f(x)$ , т.е.  $f'(x) = 2x - 3$ . Теперь найдем значения производной  $f'(x)$  в точках  $-1$ ;  $2$ . Имеем:  $f'(-1) = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$  и  $f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$ . **Ответ:**  $-5$ ;  $1$ .



**195а)** Угловым коэффициентом касательной к функции  $f(x) = x^2$  равен значению производной этой функции  $k = f'(x) = 2x$  в точке касания  $x_0 = -1$ , т.е.  $k = 2x_0 = 2 \cdot (-1) = -2$ . Поэтому уравнение касательной  $y = -2x + b$ . Касательная проходит через точку  $A$ , лежащую на параболе  $f(x) = x^2$ . Координата  $y = (-1)^2 = 1$ , поэтому координаты точки  $A$   $(-1; 1)$ . Подставим координаты точки  $A$  в уравнение касательной:  $1 = -2 \cdot (-1) + b$  или  $1 = 2 + b$ , откуда  $b = -1$ .

Подставив эту величину, получаем уравнение касательной  $y = -2x - 1$ . **Ответ:**  $y = -2x - 1$ .

**196а)** Сначала найдем приращение координаты  $x(t) = -t^2 + 8t$ . Получаем  $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = -(t_0 + \Delta t)^2 + 8(t_0 + \Delta t) - (-t_0^2 + 8t_0) = -(t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2) + 8t_0 + 8\Delta t - (-t_0^2 + 8t_0) = -t_0^2 - 2t_0\Delta t - \Delta t^2 + 8t_0 + 8\Delta t - (-t_0^2 + 8t_0) = -2t_0\Delta t - \Delta t^2 + 8\Delta t = \Delta t(-2t_0 - \Delta t + 8) = \Delta t(8 - 2t_0 - \Delta t)$ . Найдем среднюю скорость

тела  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 8 - 2t_0 - \Delta t$ . Теперь найдем мгновенную скорость  $\bar{v}$ . Для этого в выражении для средней скорости  $v$  величину  $\Delta t$  устремим к нулю. Тогда получаем  $v = 8 - 2t_0$ . Теперь найдем значение мгновенной скорости при  $t_0 = 6$ . Имеем:  $v = 8 - 2 \cdot 6 = -4$ .

**Ответ:**  $-4$ .

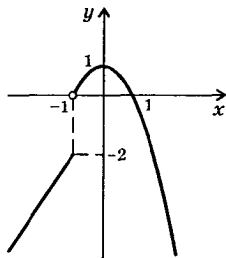
**197б)** На рис. 87,б учебника приведен график функции  $y(x)$ . Видно, что функция в точках  $x_1$  и  $x_3$  непрерывна. В точке  $x_2$  функция не является непрерывной.

**Ответ:** в точках  $x_1$  и  $x_3$  непрерывна, в точке  $x_2$  функция не является непрерывной.

**198а)** Построим график функции  $f(x) =$   
 $= \begin{cases} x - 1 & \text{при } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{при } x > -1 \end{cases}$ . График этой функ-

ции состоит из луча и части параболы. Данная функция определена при всех значениях  $x$ , т.е.  $D(f) = (-\infty; \infty)$ . Видно, что при  $x = -1$  функция  $f(x)$  не является непрерывной.

Ответ: -1.



**199а)** Функция  $f(x) = x^3 - 4x$  является непрерывной в каждой точке области определения  $(-\infty; \infty)$ , т.к. является суммой двух непрерывных функций  $x^3$  и  $(-4x)$ . Ответ: является.

**200а)** Функция  $f(x) = x^2 - 3x + 4$  непрерывна во всей области определения. Тогда, если  $x \rightarrow x_0$ , то  $f(x) \rightarrow f(x_0)$ . Поэтому когда  $x \rightarrow 0$   $f(x) \rightarrow 0^2 - 3 \cdot 0 + 4 = 4$ , когда  $x \rightarrow 2$   $f(x) \rightarrow 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 2$ .

Ответ: 4; 2.

**201б)** Так как  $f(x) \rightarrow 1$ ,  $g(x) \rightarrow -2$  при  $x \rightarrow 3$ , то функция

$$\frac{f(x) - g(x)}{f(x) + g(x)} \rightarrow \frac{1 - (-2)}{1 + (-2)} = \frac{3}{-1} = -3 \text{ при } x \rightarrow 3. \quad \text{Ответ: } -3.$$

**203а)** Функция  $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 3}$  определена и непрерывна при  $x \in (-\infty; 3) \cup (3; \infty)$ . При  $x = 4$  эта функция определена и непрерывна. Следовательно, при  $x \rightarrow 4$   $f(x) \rightarrow f(4) = \frac{4^2 + 3 \cdot 4 + 2}{4 - 3} = 30$ .

Ответ: 30.

**208а)** Так как функция  $f(x) = x^2 + x^3$  равна сумме функций, то ее производная равна сумме производных этих функций. Получаем:  $f'(x) = (x^2 + x^3)' = (x^2)' + (x^3)' = 2x + 3x^2$ . Ответ:  $2x + 3x^2$ .

**209а)** Так как функция  $f(x) = x^3(4 + 2x - x^2)$  равна произведению функций  $x^3$  и  $4 + 2x - x^2$ , то для нахождения ее производной используем правило нахождения производной от произведения функций. Получаем  $f'(x) = (x^3)'(4 + 2x - x^2) + x^3(4 + 2x - x^2)' = 3x^2(4 + 2x - x^2) + x^3(2 - 2x) = 12x^2 + 6x^3 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^4 = -5x^4 + 8x^3 + 12x^2$ . Ответ:  $-5x^4 + 8x^3 + 12x^2$ .

**209б)** Так как функция  $f(x) = \sqrt{x}(2x^2 - x) = x^{\frac{1}{2}}(2x^2 - x)$  равна произведению функций  $x^{\frac{1}{2}}$  и  $2x^2 - x$ , то используем правило нахождения производной от произведения функций. Получаем:

$$f'(x) = (x^{\frac{1}{2}})'(2x^2 - x) + x^{\frac{1}{2}}(2x^2 - x)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(2x^2 - x) + x^{\frac{1}{2}}(2 \cdot 2x - 1) =$$

$$= x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} = -5x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}\left(-5x - \frac{3}{2}\right) = \sqrt{x}\left(-5x - \frac{3}{2}\right).$$

Ответ:  $\sqrt{x}\left(-5x - \frac{3}{2}\right).$

**210в)** Так как функция  $y = \frac{3x-2}{5x+8}$  представляет собой частное функций  $3x-2$  и  $5x+8$ , то используем правило нахождения производной от частного функций. Получаем:

$$y' = \frac{(3x-2)'(5x+8) - (3x-2)(5x+8)'}{(5x+8)^2} = \frac{3(5x+8) - (3x-2) \cdot 5}{(5x+8)^2} =$$

$$= \frac{15x + 24 - 15x + 10}{(5x+8)^2} = \frac{34}{(5x+8)^2}.$$

Ответ:  $\frac{34}{(5x+8)^2}.$

**211б)** Функцию  $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x^2} + \sqrt{x}$  запишем в виде  $y = \frac{1}{3}x - 4x^{-2} + x^{\frac{1}{2}}$ . Используем правило нахождения производной от суммы функций. Получаем

$$y' = \left(\frac{1}{3}x - 4x^{-2} + x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(\frac{1}{3}x\right)' - (4x^{-2})' + (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{3} - 4 \cdot (-2)x^{-3} +$$

$$+ \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} + 8x^{-3} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{8}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ответ:  $\frac{1}{3} + \frac{8}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

**212б)** Найдем сначала производную функции  $f(x) = x - 4\sqrt{x} = x - 4x^{\frac{1}{2}}$ . Получаем  $f'(x) = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$ . Вычислим значения производной в данных точках:  $f'(0,01) = 1 - \frac{2}{\sqrt{0,01}} = 1 -$

$$- \frac{2}{0,1} = 1 - 20 = -19 \text{ и } f'(4) = 1 - \frac{2}{\sqrt{4}} = 1 - \frac{2}{2} = 1 - 1 = 0.$$

Ответ:  $-19; 0.$

**2136)** Найдем производную от функции  $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12$ .

Получаем  $f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot 3x^2 + 2x = -2x^2 + 2x$ . Приравняем производную нулю и получим неполное квадратное уравнение:  $-2x^2 + 2x = 0$ . Разложим его левую часть на множители:  $-2x(x-1) = 0$ . Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем:  $x = 0$  или  $x - 1 = 0$  (откуда  $x = 1$ ).

Ответ: 0; 1.

**2146)** Найдем производную от функции  $f(x) = x^3 + 1,5x^2$  и получим  $f'(x) = 3x^2 + 1,5 \cdot 2x = 3x^2 + 3x$ . Решим неравенство  $f'(x) < 0$ . Имеем:  $3x^2 + 3x < 0$  или  $3x(x+1) < 0$ . Решение этого неравенства  $-1 < x < 0$  или  $x \in (-1; 0)$ . Ответ:  $(-1; 0)$ .

**215а)** Для нахождения производной функции  $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{1 + 4x^5}$  используем правило нахождения производной от частного функций.

$$\begin{aligned} \text{Получаем: } f'(x) &= \frac{(x^3 - 3x)'(1 + 4x^5) - (x^3 - 3x)(1 + 4x^5)'}{(1 + 4x^5)^2} = \\ &= \frac{(3x^2 - 3)(1 + 4x^5) - (x^3 - 3x) \cdot 4 \cdot 5x^4}{(1 + 4x^5)^2} = \frac{3x^2 + 12x^7 - 3 - 12x^5 - 20x^7 + 60x^5}{(1 + 4x^5)^2} = \\ &= \frac{-8x^7 + 48x^5 + 3x^2 - 3}{(1 + 4x^5)^2}. \quad \text{Ответ: } \frac{-8x^7 + 48x^5 + 3x^2 - 3}{(1 + 4x^5)^2}. \end{aligned}$$

**215б)** Данную функцию  $f(x) = \left(\frac{3}{x} + x^2\right)(2 - \sqrt{x})$  запишем в виде  $f(x) = (3x^{-1} + x^2)(2 - x^{\frac{1}{2}})$ . Используем правило нахождения производной от произведения функций. Получаем:  $f'(x) = (3x^{-1} + x^2)' \times (2 - x^{\frac{1}{2}}) + (3x^{-1} + x^2)(2 - x^{\frac{1}{2}})' = (3 \cdot (-1) \cdot x^{-2} + 2x)(2 - x^{\frac{1}{2}}) + (3x^{-1} + x^2) \times (-\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}) = (-3x^{-2} + 2x)(2 - x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}(3x^{-1} + x^2) = -6x^{-2} + 3x^{-\frac{3}{2}} + 4x - 2x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} = -6x^{-2} + \frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}} + 4x - \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}$ .

Ответ:  $-6x^{-2} + \frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} + 4x - \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$ .

**2166)** Найдем производную функции  $f(x) = 2x^4 - x^8$ . Получаем:  $f'(x) = 2 \cdot 4x^3 - 8x^7 = 8x^3(1 - x^4) = 8x^3(1 - x^2)(1 + x^2) = 8x^3(1 - x)(1 + x)(1 + x^2)$ . Приравняем производную нулю. Имеем уравнение

$8x^3(1-x)(1+x)(1+x^2) = 0$ . Так как при всех значениях  $x$  выражение  $1+x^2 \neq 0$ , то разделим обе части этого уравнения на  $8(1+x^2)$ . Получаем уравнение  $x^3(1-x)(1+x) = 0$ . Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Имеем уравнения:  $x^3 = 0$  (корень  $x = 0$ );  $1-x = 0$  (корень  $x = 1$ ) и  $1+x = 0$  (корень  $x = -1$ ). Ответ: 0; 1; -1.

**217а)** Найдем производную функции  $f(x) = x^3 - 6x^2 - 63x$ . Получаем:  $f'(x) = 3x^2 - 6 \cdot 2x - 63 = 3(x^2 - 4x - 21)$ . Решим неравенство  $f'(x) < 0$  или  $3(x^2 - 4x - 21) < 0$ . Корни этого квадратного трехчлена  $x_1 = -3$  и  $x_2 = 7$ . Поэтому решение неравенства  $x \in (-3; 7)$ .

Ответ:  $(-3; 7)$ .

**218а)** Например, такой функцией будет  $f(x) = x^2 + 3x + 7$ , т.к.  $f'(x) = 2x + 3$  — данная функция. Ответ:  $x^2 + 3x + 7$ .

**220а)** Представим сложную функцию  $h(x) = \cos 3x$  в виде  $h(x) = g(f(x))$ . Чтобы найти значение данной функции  $h(x)$  сначала вычисляют ее аргумент  $f(x) = 3x$ , а затем находят косинус такого аргумента, т.е.  $h(f) = \cos f$  или  $h(x) = \cos x$  (т.к. безразлично, какой буквой обозначен аргумент функции).

Ответ:  $h(x) = \cos x$ ,  $f(x) = 3x$ .

**221а)** Представим сложную функцию  $h(x) = (3 - 5x)^5$  в виде  $h(x) = g(f(x))$ . Чтобы найти значение данной функции  $h(x)$  сначала вычисляют значение линейной функции  $f(x) = 3 - 5x$ , а затем находят пятую степень этой величины, т.е.  $h(f) = f^5$  или  $h(x) = x^5$  (т.к. безразлично, какой буквой обозначен аргумент функции).

Ответ:  $h(x) = x^5$ ,  $f(x) = 3 - 5x$ .

**222а)** Область определения функции  $y = \sqrt{9 - x^2}$  задается условием  $9 - x^2 \geq 0$  (подкоренное выражение должно быть неотрицательным). Решая это квадратное неравенство, получим  $x \in [-3; 3]$ .

Ответ:  $[-3; 3]$ .

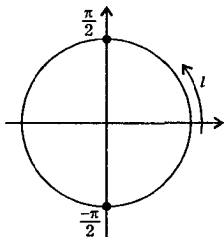
**222б)** Область определения функции  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}$  задается условием  $x^2 - 7x + 12 > 0$  (подкоренное выражение должно быть неотрицательным и делить на нуль нельзя). Решая это квадратное неравенство, получим  $x \in (-\infty; 3) \cup (4; \infty)$ .

Ответ:  $(-\infty; 3) \cup (4; \infty)$ .

**223а)** Область определения функции  $y = \sqrt{\cos x}$  задается условием  $\cos x \geq 0$  (подкоренное выражение должно быть неотрицательным). Из тригонометрического круга видно, что неравенство  $\cos x \geq 0$  выполнено в I и IV четвертях, т.е. при  $x \in$

$$\in \left[ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right], \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $\left[ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right], \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$



**224а)** Функция  $f(x) = (2x - 7)^8$  является сложной и ее можно записать в виде  $f(x) = h(g(x))$ , где  $h(g) = g^8$  и  $g(x) = 2x - 7$ . По правилу нахождения производной сложной функции получаем:  $f' = h'_g \cdot g'_x = (g^8)'_g \cdot (2x - 7)'_x = 8g^7 \cdot 2 = 16g^7 = 16(2x - 7)^7$ . Индекс внизу указывает, по какой переменной берется производная.

Ответ:  $16(2x - 7)^7$ .

**224б)** Функцию  $f(x) = \frac{1}{(5x + 1)^3}$  запишем в виде  $f(x) = (5x + 1)^{-3}$ .

Эта функция является сложной и ее можно представить в виде  $f(x) = h(g(x))$ , где  $h(g) = g^{-3}$  и  $g(x) = 5x + 1$ . По правилу нахождения производной сложной функции получаем:  $f' = h'_g \cdot g'_x = (g^{-3})'_g \cdot (5x + 1)'_x = -3g^{-4} \cdot 5 = -15g^{-4} = -15(5x + 1)^{-4} = -\frac{15}{(5x + 1)^4}$ . Индекс внизу указывает, по какой переменной берется производная.

Ответ:  $-\frac{15}{(5x + 1)^4}$ .

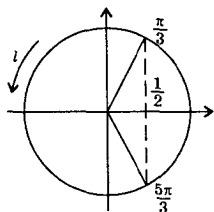
**225б)** Функция  $f(x) = \left(\frac{1}{4}x - 7\right)^8 - (1 - 2x)^4$  является разностью

двух сложных функций  $\left(\frac{1}{4}x - 7\right)^8$  и  $(1 - 2x)^4$ . Находя производные этих функций (аналогично примерам 224а, б), получим:

$$f' = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}x - 7\right)^7 \cdot \frac{1}{4} - 4(1 - 2x)^3 \cdot (-2) = 2\left(\frac{1}{4}x - 7\right)^7 + 8(1 - 2x)^3.$$

Ответ:  $2\left(\frac{1}{4}x - 7\right)^7 + 8(1 - 2x)^3$ .

**226а)** Область определения функции  $y = \sqrt{1 - 2\cos x}$  задается



условием  $1 - 2\cos x \geq 0$  (подкоренное выражение должно быть неотрицательным). За-

пишем это неравенство в виде  $\cos x \leq \frac{1}{2}$ .

По оси косинусов (горизонтальная ось) отложим значение  $\frac{1}{2}$ . Построим углы, удов-

летворяющие условию  $\cos x = \frac{1}{2}$  на проме-

жутке  $[0; 2\pi]$ . Это углы  $x_1 = \frac{\pi}{3}$  и  $x_2 = 2\pi -$

$-\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ . Множество точек окружности, удовлетворяющих нера-

венству, отмечено буквой  $l$ . Видно, что решением неравенства

$\cos x \leq \frac{1}{2}$  являются значения  $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$ . Учтем периодичность

функции косинус и получим  $x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**226г)** Область определения функции  $y = \sqrt{\frac{1}{x} + 1}$  задается усло-

вием  $\frac{1}{x} + 1 \geq 0$  (подкоренное выражение должно быть неотрица-

тельным). Запишем это неравенство в виде  $\frac{1+x}{x} \geq 0$  и решим его

методом интервалов. Отметим точки  $x_1 = -1$  и  $x_2 = 0$ , в которых

числитель и знаменатель обращаются в нуль. Построим диаграм-

му знаков дроби  $\frac{1+x}{x}$ . Учтем, что  $x \neq 0$  (делить на нуль нельзя).

Тогда решение неравенства  $x \in (-\infty; -1] \cup (0; \infty)$ .



Ответ:  $(-\infty; -1] \cup (0; \infty)$ .

**227а)** Даны функции  $f(x) = 3 - 2x$  и  $g(x) = x^2$ . Зададим форму-

лой сложную функцию  $h(x) = f(g(x))$ . Так как  $g(x) = x^2$ , то функция

$h(x) = f(x^2)$ . Теперь найдем эту функцию, если ее аргумент равен  $x^2$ , т.е.  $h(x) = 3 - 2 \cdot x^2$ . Ответ:  $h(x) = 3 - 2 \cdot x^2$ .

**227в)** Даны функции  $f(x) = 3 - 2x$  и  $g(x) = x^2$ . Зададим формулой сложную функцию  $h(x) = g(f(x))$ . Так как  $f(x) = 3 - 2x$ , то функция  $h(x) = g(3 - 2x)$ . Теперь найдем эту функцию, если ее аргумент равен  $(3 - 2x)$ , т.е.  $h(x) = (3 - 2x)^2$ . Ответ:  $h(x) = (3 - 2x)^2$ .

**228а)** Даны функции  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  и  $g(x) = \cos x$ . Зададим формулой сложную функцию  $h(x) = f(g(x))$ . Так как  $g(x) = \cos x$ , то функция  $h(x) = f(\cos x)$ . Теперь найдем эту функцию, если ее аргумент равен  $\cos x$ , т.е.  $h(x) = \frac{1}{\cos x - 1}$ . Найдем область определения этой функции. Она задается условием  $\cos x - 1 \neq 0$  (делить на нуль нельзя). Решая это неравенство, получаем  $x \neq 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Таким образом, область определения функции  $h(x)$  — все значения  $x$ , кроме  $x = 2\pi n$ .

Ответ:  $h(x) = \frac{1}{\cos x - 1}$ ; все  $x$ , кроме  $x = 2\pi n$  (где  $n \in \mathbb{Z}$ ).

**228в)** Даны функции  $p(x) = \sqrt{x}$  и  $g(x) = \cos x$ . Зададим формулой сложную функцию  $h(x) = p(g(x))$ . Так как  $g(x) = \cos x$ , то функция  $h(x) = p(\cos x)$ . Теперь найдем эту функцию, если ее аргумент равен  $\cos x$ , т.е.  $h(x) = \sqrt{\cos x}$ . Найдем область определения этой функции. Она задается условием  $\cos x \geq 0$  (подкоренное выражение должно быть неотрицательным). Решая это неравенство, получим:  $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$  (см. задачу 223,а).

Ответ:  $h(x) = \sqrt{\cos x}$ ,  $D(h) = \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**229а)** Такой функцией является функция  $f(x) = \frac{x}{2}$ . Проверим это. Для функции  $g(x) = 2x$  найдем  $f(g(x))$ . Так как  $g(x) = 2x$ , то  $f(g(x)) = f(2x) = \frac{2x}{2} = x$ . Таким образом, требуемое равенство выполнено. Ответ:  $f(x) = \frac{x}{2}$ .

**229в)** Такой функцией является функция  $f(x) = \frac{x-2}{3}$ . Проверим это. Для функции  $g(x) = 3x + 2$  найдем  $f(g(x))$ . Так как  $g(x) = 3x + 2$ , то  $f(g(x)) = f(3x + 2) = \frac{(3x + 2) - 2}{3} = \frac{3x}{3} = x$ . Таким образом, требуемое равенство выполнено. Ответ:  $f(x) = \frac{x-2}{3}$ .

**230а)** Функция  $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)^{17}$  является сложной. Ее можно записать в виде  $f(x) = h(g(x))$ , где  $h(g) = g^{17}$  и  $g(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ .

Используем правило нахождения производной сложной функции:  $f'_x = h'_g \cdot g'_x = (g^{17})'_g \cdot (x^3 - 2x^2 + 3)'_x = 17g^{16} \cdot (3x^2 - 2 \cdot 2x) = 17(x^3 - 2x^2 + 3)^{16} \cdot (3x^2 - 4x)$ . Индекс внизу указывает переменную, по которой берется производная. **Ответ:**  $17(x^3 - 2x^2 + 3)^{16} \cdot (3x^2 - 4x)$ .

**230б)** Функцию  $f(x) = \sqrt{1 - x^4} + \frac{1}{x^2 + 3}$  запишем в виде  $f(x) = (1 - x^4)^{\frac{1}{2}} + (x^2 + 3)^{-1}$ . Эта функция равна сумме двух сложных функций  $(1 - x^4)^{\frac{1}{2}}$  и  $(x^2 + 3)^{-1}$ . Используя правило нахождения производной сложной функции (аналогично примеру 230, а), получим:  $f' = \frac{1}{2}(1 - x^4)^{-\frac{1}{2}}(-4x^3) + (-1)(x^2 + 3)^{-2} \cdot (2x) = -\frac{2x^3}{\sqrt{1 - x^4}} - \frac{2x}{(x^2 + 3)^2}$ .

**Ответ:**  $-\frac{2x^3}{\sqrt{1 - x^4}} - \frac{2x}{(x^2 + 3)^2}$ .

**231б)** Учитывая, что производная суммы функций равна сумме производных этих функций, получаем:  $y' = \left(1 - \frac{1}{2} \sin x\right)' = \left(1\right)' - \left(\frac{1}{2} \sin x\right)' = 0 - \frac{1}{2}(\sin x)' = -\frac{1}{2} \cos x$ . **Ответ:**  $-\frac{1}{2} \cos x$ .

**232г)** Учтем, что производная суммы функций равна сумме производных этих функций. Для функции  $y = 2 \sin x + 1,5 \cos x$  получаем  $y' = (2 \sin x + 1,5 \cos x)' = (2 \sin x)' + (1,5 \cos x)' = 2(\sin x)' + 1,5(\cos x)' = 2 \cos x - 1,5 \sin x$ . **Ответ:**  $2 \cos x - 1,5 \sin x$ .

**233б)** Производная суммы функций равна сумме производных этих функций. Поэтому для функции  $y = \cos x - \operatorname{tg} x$  получаем:  $y' = (\cos x - \operatorname{tg} x)' = (\cos x)' - (\operatorname{tg} x)' = -\sin x - \frac{1}{\cos^2 x}$ .

**Ответ:**  $-\sin x - \frac{1}{\cos^2 x}$ .

**234а)** Используя четность функции косинус и формулу приведения, запишем функцию  $f(x) = \frac{1}{2} \cos(2x - \pi)$  в виде:  $f(x) = \frac{1}{2} \cos(\pi - 2x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$ . Используя правило нахождения производной сложной функции, получим:  $f'(x) = \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right)' = -\frac{1}{2}(-\sin 2x) \times 2 = \sin 2x$ . Вычислим значения производной в данных точках:  $f'(0) = \sin(2 \cdot 0) = \sin 0 = 0$  и  $f'(\pi) = \sin 2\pi = 0$ . **Ответ:** 0; 0.

**234б)** Учтем, что производная от суммы двух функций равна сумме производных этих функций. Также используем правило нахождения производной сложной функции. Запишем функцию  $f(x) = x - \operatorname{tg}(-2x)$  в виде  $f(x) = x + \operatorname{tg} 2x$ . Тогда производная  $f'(x) = (x + \operatorname{tg} 2x)' = (x)' + (\operatorname{tg} 2x)' = 1 + \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 = 1 + \frac{2}{\cos^2 2x}$ . Теперь найдем значения производной в заданных точках:  $f'(0) = 1 + \frac{2}{\cos^2(2 \cdot 0)} = 1 + \frac{2}{\cos^2 0} = 1 + \frac{2}{1} = 3$ ,  $f'(\pi) = 1 + \frac{2}{\cos^2(2\pi)} = 1 + \frac{2}{1} = 3$ .

Ответ: 3; 3.

**235а)** Сначала найдем производную функции  $f(x) = \frac{1}{2}x + \cos x$ .

Получаем:  $f'(x) = \left(\frac{1}{2}x + \cos x\right)' = \left(\frac{1}{2}x\right)' + (\cos x)' = \frac{1}{2} - \sin x$ . Приравняем производную нулю и получим уравнение:  $\frac{1}{2} - \sin x = 0$  или  $\sin x = \frac{1}{2}$ . Решения этого уравнения  $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \times \frac{\pi}{6} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Ответ:  $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**235г)** Найдем производную функции  $f(x) = x - \cos x$ . Получаем:  $f'(x) = (x - \cos x)' = (x)' - (\cos x)' = 1 - (-\sin x) = 1 + \sin x$ . Приравняем производную нулю и получим уравнение:  $1 + \sin x = 0$  или  $\sin x = -1$ .

Решения этого уравнения  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**236а)** Функция  $f(x) = x^3 \sin 2x$  является произведением двух функций  $x^3$  и  $\sin 2x$ . Поэтому используем формулу для нахождения производной от произведения двух функций. Получаем  $f'(x) = (x^3 \sin 2x)' = (x^3)' \cdot \sin 2x + x^3 \cdot (\sin 2x)' = 3x^2 \sin 2x + x^3 \cos 2x \cdot 2 = 3x^2 \sin 2x + 2x^3 \cos 2x$ . Ответ:  $3x^2 \sin 2x + 2x^3 \cos 2x$ .

**236в)** Функция  $f(x) = \frac{\cos 3x}{x}$  является частным функций  $\cos 3x$  и  $x$ . Поэтому используем формулу для нахождения производной

от частного функций. Получаем:  $f'(x) = \left(\frac{\cos 3x}{x}\right)' = \frac{(\cos 3x)' \cdot x - \cos 3x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{(-\sin 3x \cdot 3)x - \cos 3x \cdot 1}{x^2} = -\frac{3x \sin 3x + \cos 3x}{x^2}$ .

Ответ:  $-\frac{3x \sin 3x + \cos 3x}{x^2}$ .

**237а)** Учтем формулу для нахождения производной сложной функции. Для функции  $f(x) = \sin^2 x$  получаем производную:  $f'(x) = (\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$ . **Ответ:**  $\sin 2x$ .

**237б)** Функция  $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$  является суммой двух функций. Учтем, что производная суммы функций равна сумме производных этих функций. Получаем:  $f'(x) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)' = (\operatorname{tg} x)' +$

$$+ (\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{-4(\cos^2 x - \sin^2 x)}{4 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{-4 \cos 2x}{\sin^2 2x}.$$

**Ответ:**  $\frac{-4 \cos 2x}{\sin^2 2x}$ .

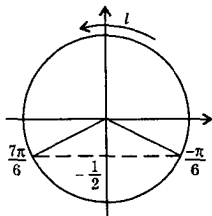
**238а)** Функцию  $f(x) = \cos 2x \sin x + \sin 2x \cos x$ , используя формулу для синуса суммы двух углов, запишем в виде:  $f(x) = \sin(x + 2x) = \sin 3x$ . Найдем производную этой функции. Получаем:  $f'(x) = (\sin 3x)' = \cos 3x \cdot 3 = 3\cos 3x$ . **Ответ:**  $3\cos 3x$ .

**238г)** Используя формулу для синуса двойного аргумента, функцию  $f(x) = \sin 3x \cos 3x$  запишем в виде  $f(x) = \frac{1}{2} \sin 6x$ . Учтем формулу для нахождения производной сложной функции. Тогда полу-

чим:  $f'(x) = \left(\frac{1}{2} \sin 6x\right)' = \frac{1}{2} \cos 6x \cdot 6 = 3 \cos 6x$ . **Ответ:**  $3 \cos 6x$ .

**239б)** Функцию  $f(x) = 2x + \cos(4x - \pi)$ , используя четность функции косинус и формулу приведения, запишем в виде:  $f(x) = 2x + \cos(\pi - 4x) = 2x - \cos 4x$ . Найдем производную этой функции:  $f'(x) = (2x - \cos 4x)' = (2x)' - (\cos 4x)' = 2 - (-\sin 4x \cdot 4) = 2 + 4\sin 4x$ . Приравняем производную нулю. Получаем уравнение:  $2 + 4\sin 4x = 0$

или  $\sin 4x = -\frac{1}{2}$ . Решения этого уравнения  $4x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Теперь найдем  $x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4} n$ .



Теперь решим неравенство  $f'(x) > 0$ . Подставив в это неравенство производную  $f'(x)$ , получим:  $2 + 4\sin 4x > 0$  или  $\sin 4x > -\frac{1}{2}$ . Для решения неравенства введем новую неизвестную  $t = 4x$ . Имеем неравенство  $\sin t > -\frac{1}{2}$ . Решения этого неравенства  $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Вернемся

к старой неизвестной  $x$ . Получаем двойное линейное неравенство  $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < 4x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$ . Разделим все члены этого неравенства на положительное число 4. При этом знак неравенства сохраняется:  $-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}n < x < \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{2}n$ .

Ответ:  $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4}n$ ;  $\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}n; \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{2}n\right)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**240а)** Такой функцией является, например, функция  $f(x) = x + \cos x - 3$ . Проверим это. Найдем производную этой функции:  $f'(x) = (x + \cos x - 3)' = 1 - \sin x$ . Видно, что производная  $f'(x)$  совпадает с данной функцией. Ответ:  $f(x) = x + \cos x - 3$ .

### § 5. Применения непрерывности и производной

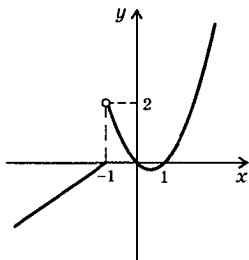
**241а)** Функция  $f(x) = x^4 - x + 1$  непрерывна в любой точке области определения  $D(f) = \mathbb{R}$ , т.к. является суммой непрерывных функций. Поэтому функция  $f(x)$  является непрерывной в точках  $x_1 = 0$  и  $x_2 = -1$ . Ответ: является.

**241б)** Для наглядности изобразим график функции

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{при } x \leq -1 \\ x^2 - x & \text{при } x > -1 \end{cases} \quad \text{Из графика}$$

видно, что в точке  $x_1 = 0$  функция является непрерывной, а в точке  $x_2 = -1$  функция не является непрерывной. Рассмотрим поведение функции  $f(x)$  вблизи точки  $x_2 = -1$ . Пусть  $x = -1 + \Delta x$ . Если  $\Delta x < 0$  и  $\Delta x \rightarrow 0$ , то значение функции  $f(x) \rightarrow 0$ . Если  $\Delta x > 0$  и  $\Delta x \rightarrow 0$ , то значение функции  $f(x) \rightarrow 2$ . Таким образом, при  $x \rightarrow -1$  значение функции  $f(x)$  стремится к двум различным величинам. Следовательно, функция  $f(x)$  в точке  $x_2 = -1$  не является непрерывной.

Ответ: является, не является.



**242а)** Так как функция  $f(x) = x^3 - 2x^2$  является суммой двух непрерывных функций, то функция  $f(x)$  непрерывна на всей числовой оси. Поэтому промежуток непрерывности функции  $\mathbb{R}$ .

Ответ:  $\mathbb{R}$ .

**242б)** Функция  $f(x) = \frac{x^3 + 27}{3x + x^2}$  определена при тех значениях  $x$ , для которых  $3x + x^2 \neq 0$  или  $x(3 + x) \neq 0$ , т.е. при  $x \neq 0$  и  $x \neq -3$ .

Функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$ , если при  $x \rightarrow x_0$  значение  $f(x) \rightarrow f(x_0)$ . Но функция  $f(x)$  в точках  $x = 0$  и  $x = -3$  не существует. Поэтому в этих точках функция не является непрерывной. Следовательно, промежутки непрерывности данной функции  $(-\infty; -3)$ ,  $(-3; 0)$ ,  $(0; \infty)$ . Ответ:  $(-\infty; -3)$ ,  $(-3; 0)$ ,  $(0; \infty)$ .

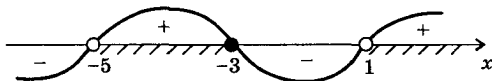
**244а)** Решим квадратное неравенство  $x^2 - 5x + 4 > 0$  методом интервалов. Найдем значения  $x$ , при которых выражение  $x^2 - 5x + 4$  равно нулю. Эти значения  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 4$ . Отметим эти точки на координатной оси. Они разбили координатную ось на три интервала. Определим знак выражения  $x^2 - 5x + 4$  в последнем третьем промежутке. Например, для точки  $x = 10$  из этого интервала получаем:  $10^2 - 5 \cdot 10 + 4 > 0$ . При переходе к каждому следующему промежутку знак выражения меняется на противоположный.



Получаем диаграмму знаков этого выражения. Учтем что данное неравенство строгое, и границы интервалов в решение не входят. На основании диаграммы знаков запишем решение  $x \in (-\infty; 1) \cup (4; \infty)$ .

Ответ:  $(-\infty; 1) \cup (4; \infty)$ .

**244б)** Рациональное неравенство  $\frac{x+3}{x^2+4x-5} \geq 0$  решим методом интервалов. Найдем значения  $x$ , при которых обращаются в нуль числитель  $x+3=0$  (корень  $x=-3$ ) и знаменатель  $x^2+4x-5=0$  (корни  $x=1$  и  $x=-5$ ) дроби  $\frac{x+3}{x^2+4x-5}$ . Отметим эти точки на координатной оси. Они разбили ось на четыре интервала. Определим



знак дроби  $\frac{x+3}{x^2+4x-5}$ , например, в последнем четвертом промежутке. Для точки  $x = 2$  из этого интервала получаем  $\frac{2+3}{2^2+4 \cdot 2-5} > 0$ . При переходе к каждому следующему промежутку знак выражения  $\frac{x+3}{x^2+4x-5}$  меняется на противоположный. Имеем диаграмму знаков этой дроби. Учтем, что  $x \neq -5$  и  $x \neq 1$ , т.к. делить на нуль нельзя. На основании диаграммы знаков получаем решение данного неравенства  $x \in (-5; -3] \cup (1; \infty)$ . Ответ:  $(-5; -3] \cup (1; \infty)$ .

**2456)** В рациональном неравенстве  $\frac{8}{x^2 - 6x + 8} < 1$  перенесем число 1 в левую часть и приведем выражения к общему знаменателю. Получаем:  $\frac{8}{x^2 - 6x + 8} - 1 < 0$  или  $\frac{8 - x^2 + 6x - 8}{x^2 - 6x + 8} < 0$  или

$\frac{-x^2 + 6x}{x^2 - 6x + 8} < 0$ . Решим это неравенство методом интервалов. Найдем значения  $x$ , при которых обращаются в нуль числитель  $-x^2 + 6x = 0$  (корни  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 6$ ) и знаменатель  $x^2 - 6x + 8 = 0$  (корни  $x_3 = 2$  и  $x_4 = 4$ ) дроби  $\frac{-x^2 + 6x}{x^2 - 6x + 8}$ . Отметим эти точки на координатной оси. Они разбивают ось на пять интервалов. Определим знак дроби  $\frac{-x^2 + 6x}{x^2 - 6x + 8}$ , например, в последнем пятом промежутке.

Для точки  $x = 10$  из этого интервала получаем  $\frac{-10^2 + 6 \cdot 10}{10^2 - 6 \cdot 10 + 8} < 0$ . При переходе к каждому следующему интервалу знак дроби меняется на противоположный. Имеем диаграмму знаков выражения



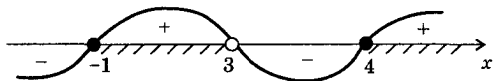
$\frac{-x^2 + 6x}{x^2 - 6x + 8}$ . Учтем, что данное неравенство строгое и границы промежутков в решение не входят. На основании диаграммы знаков получаем решение неравенства  $x \in (-\infty; 0) \cup (2; 4) \cup (6; \infty)$ .

Ответ:  $(-\infty; 0) \cup (2; 4) \cup (6; \infty)$ .

**246а)** Область определения функции  $f(x) = \sqrt{x - \frac{4}{x-3}}$  задается

условием  $x - \frac{4}{x-3} \geq 0$  (подкоренное выражение должно быть неотрицательным). Решим это неравенство методом интервалов.

Приведем выражения к общему знаменателю:  $\frac{x^2 - 3x - 4}{x-3} \geq 0$ . Найдем значения  $x$ , при которых обращаются в нуль числитель  $x^2 - 3x - 4 = 0$  (корни  $x_1 = -1$  и  $x_2 = 4$ ) и знаменатель  $x - 3 = 0$  (корень  $x_3 = 3$ ) дроби  $\frac{x^2 - 3x - 4}{x-3}$ . Отметим эти точки на координатной оси.



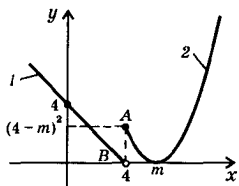
Они разбили ось на четыре интервала. Определим знак дроби, например, в последнем четвертом промежутке. Для точки  $x = 5$  из этого интервала получаем  $\frac{5^2 - 3 \cdot 5 - 4}{5 - 3} > 0$ . При переходе к каждо-

му следующему промежутку знак выражения  $\frac{x^2 - 3x - 4}{x - 3}$  меняется на противоположный. Имеем диаграмму знаков этой дроби. Учтем, что  $x \neq 3$ , т.к. делить на нуль нельзя. На основании диаграммы знаков получаем решение неравенства  $x \in [-1; 3) \cup [4; \infty)$ , что и является областью определения данной функции.

Ответ:  $[-1; 3) \cup [4; \infty)$ .

**247а)** Функция  $f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{при } x < 4 \\ (x - m)^2 & \text{при } x \geq 4 \end{cases}$  непрерывна во всех

точках координатной оси, кроме, может быть, точки  $x = 4$ . Рассмотрим поведение функции вблизи этой точки. Пусть  $x = 4 + \Delta x$  и  $\Delta x \rightarrow 0$ . Если  $\Delta x > 0$ , то значение  $f(x) \rightarrow (4 - m)^2$ . Если  $\Delta x < 0$ , то значение  $f(x) \rightarrow 4 - 4 = 0$ . Необходимо, чтобы величины  $(4 - m)^2$  и 0 совпадали. Тогда функция  $f(x)$  в точке  $x = 4$  будет непрерывной. Получаем условие  $(4 - m)^2 = 0$ , откуда  $m = 4$ . Следовательно, при  $m = 4$  функция  $f(x)$  непрерывна на всей числовой оси.



Для наглядности изобразим поведение функции  $f(x)$ . Участок 1 от параметра  $m$  не зависит. Участок 2 зависит от параметра  $m$ . При  $m \rightarrow 4$  величина  $(4 - m)^2 \rightarrow 0$  и точка  $A$  стремится к точке  $B$ . При  $m = 4$  точки  $A$  и  $B$  совпадают и функция  $f(x)$  становится непрерывной на всей числовой оси.

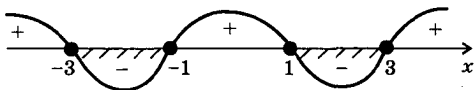
Ответ:  $m = 4$ .

**247б)** Чтобы функция  $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - m}$  была непрерывной на всей числовой оси, прежде всего необходимо, чтобы функция была определена на всей оси. Для этого надо, чтобы при любых значениях  $x$  знаменатель дроби  $x^2 - m \neq 0$ . Это возможно только при  $m < 0$ . Тогда при таких значениях  $m$  данная функция непрерывна на всей числовой оси, как частное двух непрерывных функций (при этом значение функции, стоящей в знаменателе, не равно нулю).

Ответ:  $m < 0$ .

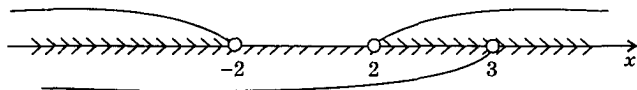
**248а)** Биквадратное неравенство  $x^4 - 10x^2 + 9 \leq 0$  решим методом интервалов. Сначала решим биквадратное уравнение. Введем новую неизвестную  $t = x^2$  и получим квадратное уравнение  $t^2 - 10t + 9 = 0$ . Корни этого уравнения  $t_1 = 1$  и  $t_2 = 9$ . Вернемся к ста-

рой неизвестной  $x$ . Получаем уравнения:  $x^2 = 1$  (его корни  $x_{1,2} = \pm 1$ ) и  $x^2 = 9$  (корни  $x_{3,4} = \pm 3$ ). Отметим эти точки на координатной оси. Они разбили ось на пять интервалов. Определим знак выражения  $x^4 - 10x^2 + 9$ , например, в последнем пятом промежутке. Для точки  $x = 10$  из этого интервала получаем  $10^4 - 10 \cdot 10^2 + 9 > 0$ . При переходе к каждому следующему промежутку знак выражения меняется на противоположный. Имеем диаграмму знаков выражения



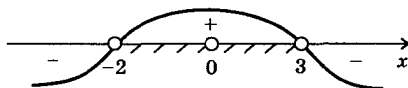
$x^4 - 10x^2 + 9$ . На основании диаграммы запишем решение данного неравенства  $x \in [-3; -1] \cup [1; 3]$ . **Ответ:**  $[-3; -1] \cup [1; 3]$ .

**249б)** Область определения неравенства  $\sqrt{x^2 - 4}(x - 3) < 0$  задается условием  $x^2 - 4 \geq 0$ , т.е.  $x \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$ . Легко проверить, что значения  $x = \pm 2$  не удовлетворяют данному строгому неравенству. В остальных точках области определения значение  $\sqrt{x^2 - 4} > 0$ .



Разделим обе части данного неравенства на положительную величину  $\sqrt{x^2 - 4}$ . При этом знак неравенства сохраняется. Получаем линейное неравенство  $x - 3 < 0$ , решение которого  $x < 3$ . Учитывая также область определения, получим окончательное решение данного неравенства  $x \in (-\infty; -2) \cup (2; 3)$ . **Ответ:**  $(-\infty; -2) \cup (2; 3)$ .

**249в)** При решении неравенства  $x^2(3 - x)(x + 2) > 0$  учтем, что  $x = 0$  не является решением его. При  $x \neq 0$  величина  $x^2 > 0$ . Разделим обе части данного неравенства на эту величину. Получаем квадратное неравенство  $(3 - x)(x + 2) > 0$  того же знака. Решая его методом

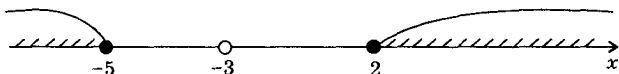


интервалов, получим  $-2 < x < 3$ . Учтем, что в этом промежутке  $x \neq 0$ . Тогда имеем решение данного неравенства  $x \in (-2; 0) \cup (0; 3)$ .

**Ответ:**  $(-2; 0) \cup (0; 3)$ .

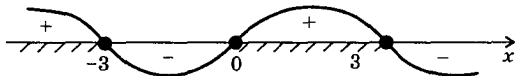
**249г)** При решении рационального неравенства  $\frac{(x-2)^3(x+5)}{(x+3)^2} \geq 0$

учтем, что  $x = -3$  не является решением неравенства (т.к. делить на нуль нельзя). При  $x \neq -3$  выражение  $(x+3)^2 > 0$ . Умножим обе части данного неравенства на положительную величину  $(x+3)^2$  (при этом знак неравенства сохраняется) и получаем  $(x-2)^3 \times (x+5) \geq 0$ . Учтем, что при  $x \neq 2$  выражение  $(x-2)^2 > 0$ . Поэтому разделим обе части неравенства на эту положительную величину (знак неравенства при этом сохраняется). Получаем квадратное неравенство  $(x-2)(x+5) \geq 0$ . Его решение  $x \in (-\infty; -5] \cup [2; \infty)$ .



Ответ:  $(-\infty; -5] \cup [2; \infty)$ .

**250а)** Область определения  $f(x) = \sqrt{9x - x^3}$  задается условием  $9x - x^3 \geq 0$  (подкоренное выражение должно быть неотрицательным). Решим неравенство  $x(9 - x^2) \geq 0$  методом интервалов. Это выражение обращается в нуль в трех точках  $x = 0$  и  $x = \pm 3$ . Отметим эти точки на координатной оси. Они разбили ось на четыре интервала. Определим знак выражения  $9x - x^3$  в последнем четвертом промежутке. Для точки  $x = 10$ , например, из этого интервала получаем  $9 \cdot 10 - 10^3 < 0$ . При переходе к каждому следующему промежутку знак выражения меняется на противоположный. Имеем диаграмму знаков выражения  $9x - x^3$ . На основании этой диаграммы запишем решение неравенства  $x \in (-\infty; -3] \cup [0; 3]$ , что и является областью определения данной функции.



раммы запишем решение неравенства  $x \in (-\infty; -3] \cup [0; 3]$ , что и является областью определения данной функции.

Ответ:  $(-\infty; -3] \cup [0; 3]$ .

**251а)** Обсудим график функции  $f(x)$  на рис. 97,а. Касательная к графику функции горизонтальна в точках  $B$  и  $D$ . Касательная образует с осью абсцисс острый угол в точках  $A$  и  $E$  и тупой угол с осью абсцисс в точке  $C$ . Ответ: см. решение.

**252а)** Обсудим график функции  $f(x)$  на рис. 98,а. Учтем геометрический смысл производной: значение производной в точке  $x_0$  равно тангенсу угла наклона между касательной (проведенной к графику в точке  $x_0$ ) и осью абсцисс. Поэтому в точках  $b$  и  $d$  произ-

водная равна нулю (касательная параллельна оси абсцисс). В точке  $c$  производная положительна (касательная образует острый угол с осью абсцисс). В точках  $a$  и  $e$  производная отрицательна (касательная имеет тупой угол с осью абсцисс). **Ответ:** см. решение.

**253б)** Тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через точку  $M \left( 2; \frac{2}{3} \right)$  графика функции  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$  равен значению производной в этой точке. Найдем производную  $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 1 = x^2 - 1$  и ее значение в точке  $M$ , т.е. при  $x = 2$ . Получаем:  $f'(2) = 2^2 - 1 = 3$  — тангенс угла наклона касательной.

**Ответ:** 3.

**254а)** Тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через точку  $M \left( \frac{\pi}{2}; 0 \right)$  графика функции  $f(x) = 2\cos x$  равен значению производной в этой точке. Найдем производную  $f'(x) = 2(-\sin x) = -2\sin x$  и ее значение в точке  $M$ , т.е. при  $x = \frac{\pi}{2}$ . Получаем:  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin \frac{\pi}{2} = -2 \cdot 1 = -2$  — тангенс угла наклона касательной. **Ответ:** -2.

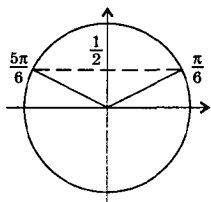
**255а)** Найдем производную функции  $f(x) = \frac{3}{x} = 3x^{-1}$ . Получаем  $f'(x) = (3x^{-1})' = 3 \cdot (-x^{-2}) = -\frac{3}{x^2}$ . Найдем значения функции и ее производной в точке  $x_0$ :  $f(x_0) = \frac{3}{x_0}$  и  $f'(x_0) = -\frac{3}{x_0^2}$ . Подставим эти величины в уравнение касательной:  $y = -\frac{3}{x_0^2}(x - x_0) + \frac{3}{x_0} = -\frac{3}{x_0^2}x + \frac{3}{x_0} + \frac{3}{x_0} = -\frac{3}{x_0^2}x + \frac{6}{x_0}$ . Для данных точек  $x_0 = -1$  и  $x_0 = 1$  получаем уравнения касательных:  $y = -3x - 6$  и  $y = -3x + 6$ .

**Ответ:**  $y = -3x - 6$ ,  $y = -3x + 6$ .

**256а)** Найдем производную функции  $f(x) = 3\sin x$ . Получаем  $f'(x) = 3\cos x$ . Найдем значения функции и ее производной в точке  $x_0$ :  $f(x_0) = 3\sin x_0$  и  $f'(x_0) = 3\cos x_0$ . Подставим эти величины в уравнение касательной:  $y = 3\cos x_0 \cdot (x - x_0) + 3\sin x_0 = 3\cos x_0 \cdot x - 3x_0 \cos x_0 + 3\sin x_0 = 3\cos x_0 \cdot x + (3\sin x_0 - 3x_0 \cos x_0)$ . Для данных точек  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  и  $x_0 = \pi$  получаем уравнения касательных:  $y = 3\cos \frac{\pi}{2} \cdot x + \left( 3\sin \frac{\pi}{2} - 3 \cdot \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \right) = 3 \cdot 0 \cdot x + \left( 3 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 0 \right) = 3$  и

$y = 3 \cos \pi \cdot x + (3 \sin \pi - 3 \cdot \pi \cdot \cos \pi) = 3 \cdot (-1) x + (3 \cdot 0 - 3 \pi \cdot (-1)) = -3x + 3\pi$ . Таким образом уравнения этих касательных  $y = 3$  и  $y = -3x + 3\pi$ . **Ответ:**  $y = 3$ ,  $y = -3x + 3\pi$ .

**257а)** Касательная к графику функции  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$  параллельна оси абсцисс, если ее угловой коэффициент (т.е. производная) равен нулю. Найдем  $f'(x) = 3x^2 - 3 \cdot 2x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$ . Приравняем производную нулю  $3(x - 1)^2 = 0$  и найдем абсциссу точки касания  $x = 1$ . Теперь легко найти и ординату этой точки  $y = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 1$ . Итак, в точке  $(1; 1)$  касательная к графику данной функции параллельна оси абсцисс. **Ответ:**  $(1; 1)$ .



**258а)** Касательная к графику функции  $f(x) = 2 \cos x + x$  параллельна оси абсцисс, если ее угловой коэффициент (т.е. производная) равен нулю. Найдем  $f'(x) = -2 \sin x + 1$ . Приравняем производную нулю  $-2 \sin x + 1 = 0$ , откуда  $\sin x = \frac{1}{2}$ . Решим это уравнение, используя тригонометрический круг.

Находим абсциссы точек касания  $x = \frac{\pi}{6} +$

$+ 2\pi n$  и  $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Теперь найдем ординаты этих точек:

$$f\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) + \frac{\pi}{6} + 2\pi n = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

$$\text{и } f\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right) = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right) + \frac{5\pi}{6} + 2\pi n = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{5\pi}{6} + 2\pi n = -\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6} + 2\pi n. \text{ Итак, координаты точек касания } \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right).$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right),$$

где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**259а)** Найдем точки пересечения графика функции  $f(x) = 3x - x^3$  с осью абсцисс. Для этого положим  $f(x) = 0$ . Получаем кубическое уравнение:  $0 = 3x - x^3$  или  $0 = x(3 - x^2)$ , корни которого  $x_1 = 0$  и  $x_{2,3} = \pm \sqrt{3}$ . Угловым коэффициентом касательной  $k = \tan \alpha$  равен значению производной в точке касания. Найдем производную  $f'(x) = 3 - 3x^2$  и определим угловые коэффициенты в найденных точках:  $k_1 = f'(0) = 3$  (угол  $\alpha_1 = \arctg 3$ ),  $k_2 = f'(\sqrt{3}) = 3 - 3 \cdot (\sqrt{3})^2 = 3 -$

$-9 = -6$  (угол  $\alpha_2 = \arctg(-6) = -\arctg 6$ ),  $k_3 = f'(-\sqrt{3}) = -6$  (угол  $\alpha_3 = -\arctg 6$ ). Ответ:  $\arctg 3$ ;  $-\arctg 6$ ;  $-\arctg 6$ .

**260а)** Если график функции  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  пересекает ось ординат, то координата  $x$  этой точки равна нулю. Найдем угловой коэффициент касательной, проведенной в этой точке. Вычислим производную

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}. \text{ Ее значение при } x=0$$

$$\text{равно } f'(0) = -\frac{1}{(0-1)^2} = -\frac{1}{1} = -1. \text{ Сле-}$$

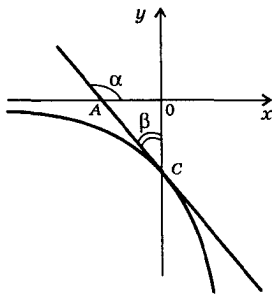
$$\text{довательно, } \operatorname{tg} \alpha = -1 \text{ и } \alpha = \frac{3\pi}{4}. \text{ Тогда}$$

$$\angle OAC = \pi - \alpha = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \text{ Треуголь-}$$

$$\text{ник } AOC \text{ прямоугольный и } \angle \beta = \frac{\pi}{2} -$$

$$- \angle OAC = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \text{ Следовательно,}$$

$$\text{касательная образует с осью ординат угол } \frac{\pi}{4}. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{4}.$$



**261а)** Получим формулу для вычисления приближенного значения функции  $f(x) = x^4 + 2x$ . Найдем производную этой функции  $f'(x) = 4x^3 + 2$ . Тогда  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$ . В нашем случае получаем:  $f(x) \approx (x_0^4 + 2x_0) + (4x_0^3 + 2) \cdot \Delta x$ . Точку  $x_1 = 2,016$  запишем в виде  $x_1 = x_0 + \Delta x$ , где  $x_0 = 2$  и  $\Delta x = 0,016$ . Тогда  $f(2,016) \approx (2^4 + 2 \cdot 2) + (4 \cdot 2^3 + 2) \cdot 0,016 = 20 + 34 \cdot 0,016 = 20 + 0,544 = 20,544$ . Точку  $x_2 = 0,97$  запишем в виде  $x_2 = x_0 + \Delta x$ , где  $x_0 = 1$  и  $\Delta x = -0,03$ . Тогда  $f(0,97) \approx (1^4 + 2 \cdot 1) + (4 \cdot 1^3 + 2) \cdot (-0,03) = 3 + 6 \cdot (-0,03) = 3 - 0,18 = 2,82$ . Ответ: 20, 544; 2, 82.

**262а)** Известно, что  $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$ . Применим эту формулу для вычисления  $1,002^{100}$ . В этом случае  $\Delta x = 0,002$  и  $n = 100$ . Тогда получаем:  $(1 + 0,002)^{100} \approx 1 + 100 \cdot 0,002 = 1 + 0,2 = 1,2$ . Ответ: 1,2.

**263б)** Надо вычислить  $\sqrt{25,012} = \sqrt{25 \cdot \frac{25,012}{25}} = \sqrt{25 \cdot 1,00048} = 5\sqrt{1,00048}$ . Известно, что  $\sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x$ . В нашем случае  $\Delta x = 0,00048$ . Поэтому  $\sqrt{1,00048} \approx \sqrt{1 + 0,00048} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,00048 = 1,00024$ . Тогда  $\sqrt{25,012} = 5\sqrt{1,00048} \approx 5 \cdot 1,00024 = 5,0012$ .

Ответ: 5,0012.

**264а)** Получим формулу для вычисления приближенного значения функции  $f(x) = \operatorname{tg} x$ . Производная этой функции  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ . Тогда  $f'(x) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$ . В нашем случае получаем:  $f(x) \approx \operatorname{tg} x_0 + \frac{1}{\cos^2 x_0} \cdot \Delta x$ . Значение  $x = 44^\circ$  запишем в виде  $x = x_0 + \Delta x$ , где  $x_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$  и  $\Delta x = -1^\circ = -\frac{\pi}{180} \approx -0,017$ . Тогда  $f(44^\circ) \approx \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) = 1 + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) = 1 - \frac{\pi}{90} \approx 1 - 2 \times 0,017 = 1 - 0,034 = 0,966$ . Ответ: 0,966.

**265а)** Получим формулу для вычисления приближенного значения функции  $f(x) = \cos x$ . Производная этой функции  $f'(x) = -\sin x$ . Тогда  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$ . В нашем случае получаем  $f(x) \approx \cos x_0 - \sin x_0 \cdot \Delta x$ . При вычислении  $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 0,04\right)$  соответственно  $x_0 = \frac{\pi}{6}$  и  $\Delta x = 0,04$ . Тогда  $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 0,04\right) \approx \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cdot 0,04 \approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0,04 = \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,02 = \frac{1,73}{2} - 0,02 = 0,86 - 0,02 = 0,84$ .

Ответ: 0,84.

**266а)** Запишем данное число в виде:  $\frac{1}{1,003^{20}} = 1,003^{-20} = (1 + 0,003)^{-20}$ . Используем формулу  $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$ . В нашем случае  $\Delta x = 0,003$  и  $n = -20$ . Тогда получаем:  $(1 + 0,003)^{-20} \approx 1 + (-20) \times 0,003 = 1 - 0,06 = 0,94$ . Ответ: 0,94.

**267)** Учтем, что скорость тела  $v(t)$  есть производная от перемещения  $x(t)$  по времени, т.е.  $v(t) = x'(t)$ . Для величины  $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$  найдем  $v(t) = -\frac{1}{3} \cdot 3t^2 + 2 \cdot 2t + 5 = -t^2 + 4t + 5$ . Найдем скорость тела в момент  $t = 2$  с:  $v(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = 9$  м/с. Если тело останавливается, то его скорость равна нулю. Получаем уравнение:  $0 = -t^2 + 4t + 5$  или  $0 = t^2 - 4t - 5$ . Корни этого квадратного уравнения  $t = 5$  и  $t = -1$  (смысла не имеет).

Ответ:  $v(t) = -t^2 + 4t + 5$  (м/с),  $v(2) = 9$  (м/с),  $t = 5$  (с).

**269)** Угловая скорость тела  $\omega(t)$  есть производная от угла поворота  $\varphi(t)$  по времени. Для величины  $\varphi(t) = 3t^2 - 4t + 2$  находим  $\omega(t) = \varphi'(t) = 3 \cdot 2t - 4 = 6t - 4$ . При  $t = 4$  получаем угловую скорость  $\omega(4) = 6 \cdot 4 - 4 = 20$ . Ответ:  $\omega(t) = 6t - 4$  (рад/с),  $\omega(4) = 20$  (рад/с).

271) Учтем, что скорость — производная от перемещения по времени, т.е.  $v = x'(t) = (2t^3 + t - 1)' = 6t^2 + 1$ . Ускорение — производная от скорости по времени, т.е.  $a = v'(t) = (6t^2 + 1)' = 12t$  (см/с<sup>2</sup>). Найдем, в какой момент времени ускорение равно данным величинам.

Если  $a = 1$  см/с<sup>2</sup>, то получаем уравнение  $1 = 12t$ , откуда  $t = \frac{1}{12}$  (с).

Если  $a = 2$  см/с<sup>2</sup>, то имеем уравнение  $2 = 12t$ , откуда  $t = \frac{1}{6}$  (с).

Ответ:  $12t$ ;  $\frac{1}{12}$  (с);  $\frac{1}{6}$  (с).

273) Известно, что перемещение тела меняется по закону  $x(t) = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ . Сначала найдем скорость тела (скорость — производная от перемещения по времени)  $v(t) = x'(t) = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$ . Теперь найдем ускорение тела (ускорение — производная от скорости по времени)  $a(t) = v'(t) = \left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)t^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}$ . Вычислим куб скорости тела:  $v^3 = \left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\right)^3 = \frac{1}{8}t^{-\frac{3}{2}}$ . Представим теперь  $v^3$  в виде:  $v^3 = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{2}a$ . Таким образом,  $v^3 = -\frac{1}{2}a$ , т.е. ускорение пропорционально кубу скорости. Ответ: доказано.

275) Перемещение меняется по закону  $x(t) = t^2 + t + 1$ . Найдем скорость тела (скорость — производная от перемещения по времени)  $v(t) = x'(t) = (t^2 + t + 1)' = 2t + 1$ . Также вычислим ускорение (ускорение — производная скорости по времени)  $a = v'(t) = (2t + 1)' = 2$  (см/с<sup>2</sup>).

а) Определим действующую на тело силу  $F = ma = 2 \text{ кг} \cdot 2 \text{ см/с}^2 = 2 \text{ кг} \cdot 0,02 \text{ м/с}^2 = 0,04 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = 0,04 \text{ Н}$ .

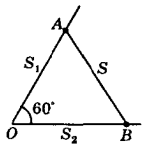
б) Найдем кинетическую энергию тела  $E$  через 2 с после начала движения  $E = \frac{mv^2}{2}$ . Для этого вычислим скорость тела в этот момент времени  $v(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \text{ см/с} = 0,05 \text{ м/с}$ . Тогда энергия тела  $E = \frac{2 \cdot 0,05^2}{2} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = 0,0025 \text{ Дж}$ .

Ответ: а) 0,04 Н; б) 0,0025 Дж.

277) Перемещения тел меняются по законам  $x_1(t) = 4t^2 - 3$  и  $x_2(t) = t^3$ . Найдем скорости тел (скорость — производная от перемещения по времени):  $v_1 = x_1'(t) = (4t^2 - 3)' = 8t$  и  $v_2 = x_2'(t) = (t^3)' = 3t^2$ . Известно, что  $v_1 > v_2$ . Поэтому получаем неравенство  $8t > 3t^2$ . Так как  $3t > 0$ , то разделим обе части неравенства на эту величину.

При этом знак неравенства сохраняется. Получаем:  $\frac{8t}{3t} > t$  или  $\frac{8}{3} > t$ , т.е.  $0 < t < 2\frac{2}{3}$  (с). Ответ:  $0 < t < 2\frac{2}{3}$  (с).

**278)** Так как первое тело движется с постоянной скоростью 5 км/ч, то его перемещение  $S_1(t) = 5t$  (км) =  $OA$ . Перемещение второго тела  $S_2(t) = 2t^2 + t$  (км) =  $OB$ . Найдём расстояние между телами  $S = AB$ . Рассмотрим  $\triangle AOB$  и запишем теорему косинусов:  $AB^2 = OA^2 + OB^2 -$



$$- 2OA \cdot OB \cos \angle AOB = S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cdot \frac{1}{2} = \\ = (5t)^2 + (2t^2 + t)^2 - 5t \cdot (2t^2 + t) = 25t^2 + 4t^4 + 4t^3 + \\ + t^2 - 10t^3 - 5t^2 = 4t^4 - 6t^3 + 21t^2, \text{ откуда } AB = \\ = \sqrt{4t^4 - 6t^3 + 21t^2} = S(t). \text{ Теперь найдём скорость}$$

удаления тел (скорость — производная от перемещения по времени)  $v = S'(t) = \left( \sqrt{4t^4 - 6t^3 + 21t^2} \right)' = \frac{(4t^4 - 6t^3 + 21t^2)'}{2\sqrt{4t^4 - 6t^3 + 21t^2}} =$

$$= \frac{4 \cdot 4t^3 - 6 \cdot 3t^2 + 21 \cdot 2t}{2\sqrt{4t^4 - 6t^3 + 21t^2}} = \frac{8t^3 - 9t + 21}{\sqrt{4t^4 - 6t^3 + 21t^2}} \text{ (км/ч) при } t > 0.$$

Ответ:  $\frac{8t^3 - 9t + 21}{\sqrt{4t^4 - 6t^3 + 21t^2}}$  при  $t > 0$ .

## § 6. Применения производной к исследованию функций

**279а)** Найдём производную функции  $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$ . Получаем  $f'(x) = \left( 3 - \frac{1}{2}x \right)' = -\frac{1}{2}$ . Эта производная отрицательна при всех значениях  $x$ . Следовательно, функция  $f(x)$  убывает на всей числовой оси. Ответ:  $(-\infty; \infty)$  — промежуток убывания.

**279б)** Найдём производную функции  $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ . Получаем  $f'(x) = (-x^2 + 2x - 3)' = -2x + 2 = 2(1 - x)$ . Видно, что при  $x < 1$  производная положительна и функция  $f(x)$  возрастает. Поэтому  $(-\infty; 1]$  — промежуток возрастания. При  $x > 1$  производная  $f'(x)$  отрицательна и функция  $f(x)$  убывает. Следовательно  $[1; \infty)$  — промежуток убывания.

Ответ:  $(-\infty; 1]$  — промежуток возрастания,  $[1; \infty)$  — промежуток убывания.

**280а)** Найдём производную функции  $f(x) = -\frac{2}{x} + 1 = -2x^{-1} + 1$ . Получаем  $f'(x) = (-2x^{-1} + 1)' = -2 \cdot (-1)x^{-2} = \frac{2}{x^2}$ . Видно, что произ-

водная положительна при  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ . Заметим, что при  $x = 0$  функция  $f(x)$  и ее производная  $f'(x)$  не определены. Следовательно, функция возрастает на промежутках  $(-\infty; 0)$ ,  $(0; \infty)$ .

**Ответ:**  $(-\infty; 0)$ ,  $(0; \infty)$  — промежутки возрастания.

**2806)** Найдем производную функции  $f(x) = x^2(x - 3) = x^3 - 3x^2$ . Получаем  $f'(x) = (x^3 - 3x^2)' = 3x^2 - 3 \cdot 2x = 3x(x - 2)$ . Изобразим на диаграмме знаки этого выражения. Видно, что производная  $f'(x)$  положительна при  $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$ . Поэтому промежутки возраста-



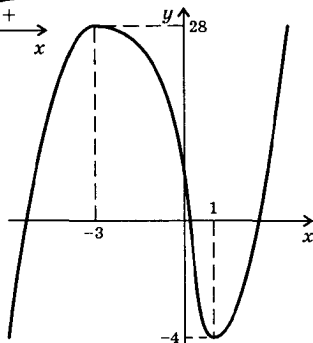
ния  $(-\infty; 0]$ ,  $[2; \infty)$ . Производная  $f'(x)$  отрицательна при  $x \in (0; 2)$ . Следовательно промежуток убывания функции  $[0; 2]$ . **Ответ:** промежутки возрастания  $(-\infty; 0]$ ,  $[2; \infty)$ , промежуток убывания  $[0; 2]$ .

**2816)** Найдем производную функции  $f(x) = 4 - x^4$ . Получаем  $f'(x) = (4 - x^4)' = -4x^3$ . Производная  $f'(x)$  положительна при  $x < 0$ . Поэтому промежуток возрастания  $(-\infty; 0]$ . Производная  $f'(x)$  отрицательна при  $x > 0$ . Следовательно промежуток убывания функции  $[0; \infty)$ . **Ответ:** промежуток возрастания  $(-\infty; 0]$ , промежуток убывания  $[0; \infty)$ .

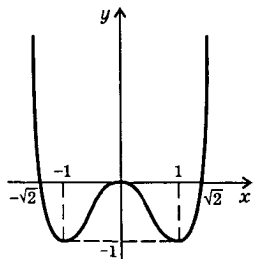
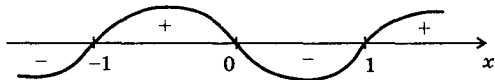
**283а)** Найдем производную функции  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ . Получаем  $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3)$ . Разложим это выражение на множители  $f'(x) = 3(x - 1)(x + 3)$  и изобразим диаграмму знаков. Видно, что производная положительна при  $x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$ .



Поэтому промежутки возрастания функции  $(-\infty; -3]$  и  $[1; \infty)$ . Производная отрицательна при  $-3 < x < 1$ . Следовательно, промежуток убывания функции  $[-3; 1]$ . Найдем значения функции  $f(x)$  в точках  $x = -3$  и  $x = 1$ . Получаем:  $f(-3) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) + 1 = 28$  и  $f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 1 = -4$ . Отметим на координатной плоскости точки  $(-3; 28)$  и  $(1; -4)$ . Схематично изобразим график. **Ответ:**  $(-\infty; -3]$ ,  $[1; \infty)$  — промежутки возрастания,  $[-3; 1]$  — промежуток убывания.



**283г)** Найдем производную функции  $f(x) = x^4 - 2x^2$ . Получаем  $f'(x) = 4x^3 - 2 \cdot 2x = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$ . Изобразим диаграмму знаков производной. Производная положительна при  $x \in (-1; 0) \cup (1; \infty)$ . Поэтому промежутки возрастания  $[-1; 0]$ ,  $[1; \infty)$ . Производная отрицательна при  $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$ . Следовательно про-



межутки убывания функции  $(-\infty; -1]$ ,  $[0; 1]$ . Учтем, что функция  $f(x) = x^4 - 2x^2$  является четной. Находим значения:  $f(-1) = f(1) = -1$  и  $f(0) = 0$ . Отметим точки  $(-1; -1)$ ,  $(1; -1)$  и  $(0; 0)$  на координатной плоскости. Также найдем точки пересечения функции с осью абсцисс. Получаем уравнение:  $0 = x^4 - 2x^2$  или  $0 = x^2(x^2 - 2)$ , откуда  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -\sqrt{2}$ ,  $x_3 = \sqrt{2}$ . Схематично изобразим график.

**Ответ:**  $[-1; 0]$ ,  $[1; \infty)$  — промежутки возрастания,  $(-\infty; -1]$ ,  $[0; 1]$  — промежутки убывания.

**284б)** Для функции  $f(x) = |x - 3| - 2$  раскроем знак модуля.

Получаем: 
$$f(x) = \begin{cases} -(x-3) - 2, & \text{если } x-3 \leq 0 \\ x-3-2, & \text{если } x-3 > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-x, & \text{если } x \leq 3 \\ x-5, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Найдем производную этой функции

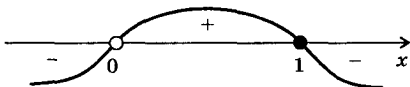
$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 3 \\ 1, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$
 . В точке  $x = 3$  производная функции не существует. Видно, что

функция возрастает на промежутке  $[3; \infty)$  и убывает на промежутке  $(-\infty; 3]$ . В точке  $x = 3$  функция достигает наименьшего значения  $f(3) = -2$ . Теперь легко построить график этой функции.

**Ответ:**  $[3; \infty)$  — промежутки возрастания,  $(-\infty; 3]$  — промежутки убывания.

**284г)** Для функции  $f(x) = \left| \frac{1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{1-x}{x} \right|$  раскроем знак модуля, учитывая знаки выражения  $\frac{1-x}{x}$  (см. рис.)

Получаем:



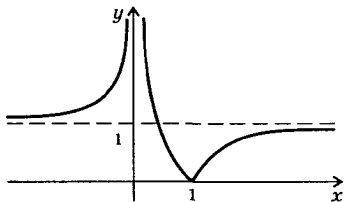
$$f(x) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{x} - 1\right), & \text{если } x \in (-\infty; 0) \cup [1; \infty) \\ \frac{1}{x} - 1, & \text{если } x \in (0; 1) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}, & \text{если } x \in (-\infty; 0) \cup [1; \infty) \\ \frac{1}{x} - 1, & \text{если } x \in (0; 1) \end{cases}$$

Найдем производную  $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{если } x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty) \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{если } x \in (0; 1) \end{cases}$ . Заметим,

что производная в точках  $x = 0$  и  $x = 1$  не существует. Учтем, что

$\frac{1}{x^2} > 0$  при  $x \neq 0$ . Тогда функция  $f(x)$  возрастает на промежутках  $(-\infty; 0)$  и  $[1; \infty)$ , убывает на промежутке  $(0; 1)$ . В точке  $x = 1$  функция принимает наименьшее значение  $f(1) = 0$ . Отметим, что при  $x \rightarrow \infty$  величина



$\frac{1}{x} \rightarrow 0$  и функция  $f(x) \rightarrow |-1| = 1$ . Учитывая перечисленное, построим график данной функции.

**Ответ:**  $(-\infty; 0)$ ,  $[1; \infty)$  — промежутки возрастания,  $(0; 1]$  — промежутки убывания.

**285а)** Функция  $f(x) = 3x + \cos 2x$  определена на  $R$ . Найдем производную функции  $f'(x) = 3 - \sin 2x \cdot 2 = 3 - 2\sin 2x$ . Определим знак производной. Очевидно  $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ . Умножим все части этого неравенства на отрицательное число  $(-2)$ . Знаки неравенств меняются на противоположные:  $2 \geq -2\sin 2x \geq -2$ . Прибавим ко всем частям неравенства число 3:  $5 \geq 3 - 2\sin 2x \geq 1$  или  $1 \leq f'(x) \leq 5$ . Видно, что производная  $f'(x)$  положительна при всех  $x$ . Следовательно, функция  $f(x)$  возрастает на  $R$ . **Ответ:** доказано.

**285б)** Функция  $g(x) = -\frac{x^3}{3} - x$  определена на  $R$ . Найдем производную  $g'(x) = -\frac{3x^2}{3} - 1 = -(x^2 + 1)$ . Видно, что производная  $g'(x)$  отрицательна при всех  $x$ . Следовательно, функция  $g(x)$  убывает на  $R$ .

**Ответ:** доказано.

**286а)** Для исследования уравнения  $x^3 - 27x + 2 = 0$  рассмотрим функцию  $f(x) = x^3 - 27x + 2$  и найдем ее производную  $f'(x) = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9)$ . На диаграмме изображены знаки этой производной. Тогда на промежутке  $P_1 = [-1; 1]$  производная  $f'(x) < 0$  и функция  $f(x)$  убывает. Определим знаки функции  $f(x)$  на концах этого промежутка:  $f(-1) = (-1)^3 - 27 \cdot (-1) + 2 > 0$  и  $f(1) = 1^3 - 27 \cdot 1 + 2 < 0$ . Видно, что функция убывает и меняет свой знак. Следовательно, на промежутке  $P_1$  уравнение имеет единственный корень.



На промежутке  $P_2 = [4; 6]$ , как видно из диаграммы, производная  $f'(x) > 0$  и функция  $f(x)$  возрастает. Определим знаки функции  $f(x)$  на концах этого промежутка:  $f(4) = 4^3 - 27 \cdot 4 + 2 < 0$  и  $f(6) = 6^3 - 27 \cdot 6 + 2 > 0$ . Видно, что функция возрастает и меняет свой знак. Следовательно, на промежутке  $P_2$  данное уравнение имеет единственный корень. Ответ: доказано.

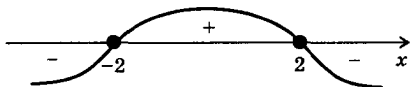
**288а)** Функция  $f(x) = 4 - 2x + 7x^2$  определена на  $R$ . Найдем производную  $f'(x) = -2 + 14x$ . Функция  $f'(x)$  также определена на  $R$  (т.е. существует при всех  $x$ ). Тогда критическая точка задается условием  $f'(x) = 0$  или  $-2 + 14x = 0$ , откуда  $x = \frac{1}{7}$ . Ответ:  $x = \frac{1}{7}$ .

**288б)** Функция  $f(x) = 1 + \cos 2x$  определена на  $R$ . Найдем производную  $f'(x) = -\sin 2x \cdot 2 = -2\sin 2x$ . Функция  $f'(x)$  также определена на  $R$  (т.е. существует при всех  $x$ ). Тогда критические точки задаются условием  $f'(x) = 0$  или  $-2\sin 2x = 0$  или  $\sin 2x = 0$ , откуда  $2x = \pi n$  и  $x = \frac{\pi}{2} n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Ответ:  $x = \frac{\pi}{2} n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**289б)** Обсудим график, изображенный на рис. 110,б учебника. Точка  $x_1$  — точка максимума (производная в этой точке не существует). Точка  $x_2$  — точка минимума (производная равна нулю). Точка  $x_3$  — точка максимума (производная равна нулю). Точка  $x_4$  — точка минимума (производная в этой точке не существует).

Ответ: см. решение.

**290а)** Найдем производную функции  $f(x) = 5 + 12x - x^3$ . Получаем  $f'(x) = 12 - 3x^2 = 3(4 - x^2)$ . Построим диаграмму знаков этого выражения (учтем, что критические точки  $x = \pm 2$ ). В точке  $x = -2$



знак производной меняется с минуса на плюс. Поэтому  $x = -2$  — точка минимума. В точке  $x = 2$  знак производной меняется с плюса на минус. Поэтому  $x = 2$  — точка максимума.

Ответ:  $x = -2$  — точка минимума,  $x = 2$  — точка максимума.

**291а)** Функция  $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$  определена при  $x \geq 0$ . Найдем производную  $f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Эта функция не равна нулю при всех  $x$ . Производная не существует при  $x = 0$ . Но эта точка не является критической, т.к. не является внутренней точкой области определения функции  $f(x)$  ( $x = 0$  — граничная точка области определения). Таким образом, функция не имеет критических точек.

Ответ: доказано.

**291г)** Функция  $f(x) = 3x^5 + 2x$  определена на  $R$ . Найдем производную  $f'(x) = 15x^4 + 2$ . Эта функция также определена на  $R$ . Производная  $f'(x)$  не обращается в нуль при всех значениях  $x$ . Следовательно, данная функция критических точек не имеет.

Ответ: доказано.

**292а)** Функция  $f(x) = \sin^2 x - \cos x$  определена на  $R$ . Найдем производную  $f'(x) = 2\sin x \cos x + \sin x$ . Эта функция также определена на  $R$ . Приравняем эту производную нулю и получим уравнение для нахождения критических точек:  $2\sin x \cos x + \sin x = 0$  или  $\sin x (2\cos x + 1) = 0$ . Произведение двух множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнения:  $\sin x = 0$  (тогда  $x = \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ) и  $2\cos x + 1 = 0$  (или  $\cos x = -\frac{1}{2}$ , откуда  $x =$

$$= \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x = \pi n$ ;  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

**292б)** Функция  $f(x) = 2x + \frac{8}{x^2}$  определена при  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ .

Найдем производную  $f'(x) = 2 - 8 \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3 - 8)}{x^3}$ . Эта функция также определена при  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ . Приравняем производную нулю и получим уравнение для нахождения критической точки  $\frac{2(x^3 - 8)}{x^3} = 0$ , откуда  $x = 2$ . Заметим, что точка  $x = 0$  критической не является. Ответ:  $x = 2$ .

**293а)** Функция  $f(x) = (x-2)^3$  определена на  $R$ . Найдем производную  $f'(x) = 3(x-2)^2$ . Эта функция также определена на  $R$ . При-

равняем производную нулю  $3(x-2)^2=0$  и найдем критическую точку  $x=2$ . Ответ:  $x=2$ .

2936) Функция  $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{при } x \leq -1 \\ x & \text{при } -1 < x < 1 \\ 2-x & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$  определена на  $R$ .

Найдем производную  $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x < -1 \\ 1 & \text{при } -1 < x < 1 \\ -1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$ . В точках  $x=-1$  и

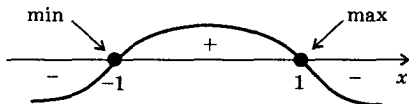
$x=1$  производная не существует. Следовательно, эти точки — критические точки функции  $f(x)$ . Ответ:  $x=-1, x=1$ .

2956) Функция  $f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$  определена на  $R$ . Найдем производную

$$f'(x) = 3 \frac{(x)' \cdot (1+x^2) - x \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = 3 \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = 3 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Эта функция также определена на  $R$ . Приравняем производную

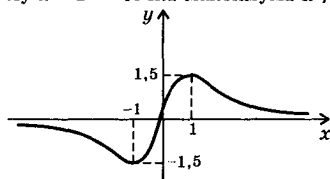
нулю  $3 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$  и найдем критические точки  $x = \pm 1$ . Знаменатель производной при всех  $x$  положительный. Поэтому знак производной определяется числителем  $1-x^2$  (знаки этого выражения приведены на диаграмме). Из диаграммы видно, что  $(-\infty; -1], [1; \infty)$  —



промежутки убывания функции  $f(x)$ ,  $[-1; 1]$  — промежуток возрастания. В точке  $x=-1$  знак производной меняется с минуса на

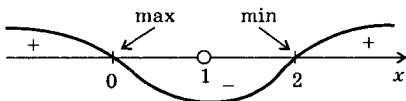
плюс. Поэтому  $x=-1$  — точка минимума и  $f(-1) = \frac{3 \cdot (-1)}{1+(-1)^2} = -\frac{3}{2}$ .

В точке  $x=1$  знак производной меняется с плюса на минус. Поэтому  $x=1$  — точка максимума и  $f(1) = \frac{3 \cdot 1}{1+1^2} = \frac{3}{2}$ . Учтем, что график



функции проходит через начало координат. Также учтем, что функция  $f(x)$  нечетная и ее график симметричен относительно начала координат. Теперь легко построить график данной функции. Ответ: см. решение.

**295г)** Функция  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$  определена при всех  $x$ , кроме  $x = 1$ . Поэтому  $x = 1$  — вертикальная асимптота. Найдем производную  $f'(x) = \frac{(x^2 - 2x + 2)'(x - 1) - (x^2 - 2x + 2)(x - 1)'}{(x - 1)^2} =$   
 $= \frac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 4x + 2 - x^2 + 2x - 2}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$ . Производная  $f'(x) = 0$  при  $x = 0$  и  $x = 2$  (критические точки). Знаменатель дроби  $\frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$  положительный в области определения  $f(x)$  и знак производной  $f'(x)$  определяется числителем  $x^2 - 2x$  (знаки этого выражения приведены на диаграмме). В точке  $x = 0$  знак производной меняется с плюса на минус. Поэтому  $x = 0$  — точка максимума и  $f(0) = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 + 2}{0 - 1} = -2$ . В точке  $x = 2$  знак производной меняется с минуса на плюс. Поэтому  $x = 2$  — точка минимума и  $f(2) = \frac{2^2 - 2 \cdot 2 + 2}{2 - 1} = 2$ .

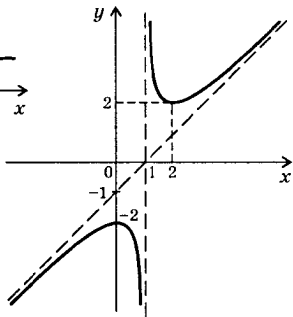


Функция  $f(x)$  не пересекает ось абсцисс, т.к. уравнение  $x^2 - 2x + 2 = 0$  не имеет корней. График функции пересекает ось ординат в точке  $y = f(0) = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 + 2}{0 - 1} = -2$ .

Запишем функцию в виде  $f(x) =$

$= \frac{(x - 1)^2 + 1}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1}$ . При  $x \rightarrow \infty$  величина  $\frac{1}{x - 1} \rightarrow 0$  и  $f(x) \approx x - 1$ . Поэтому  $y = x - 1$  — наклонная асимптота. Учитывая перечисленные свойства функции  $f(x)$ , построим ее график.

**Ответ:** см. решение.



**296б)** Функция  $f(x) = -\frac{2x^2}{3} + x + \frac{2}{3}$  определена на  $\mathbb{R}$ , т.е.  $D(f) = \mathbb{R}$ . Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. С осью ординат: положим  $x = 0$  и найдем  $f(0) = -\frac{2 \cdot 0^2}{3} + 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ . С осью абсцисс: положим  $f(x) = 0$  и получим квадратное уравнение:  $-\frac{2x^2}{3} + x + \frac{2}{3} = 0$  или  $2x^2 - 3x - 2 = 0$ , корни которого  $x_1 = -\frac{1}{2}$

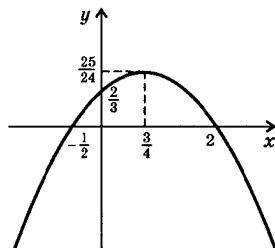
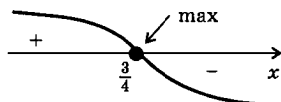
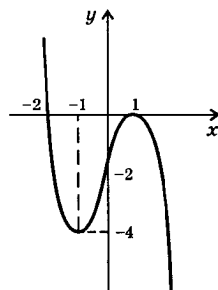
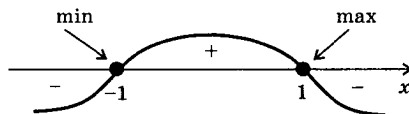


график этой функции (парабола).

Ответ: см. решение.

**297а)** Функция  $f(x) = -x^3 + 3x - 2$  определена на  $R$ , т.е.  $D(f) = R$ . Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. С осью ординат: положим  $x = 0$  и найдем  $y = f(0) = -2$ . С осью абсцисс: положим  $f(x) = 0$  и получим кубическое уравнение:  $-x^3 + 3x - 2 = 0$  или  $x^3 - 3x + 2 = 0$  или  $(x^3 - x) - (2x - 2) = 0$  или  $x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1) = 0$  или  $(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0$ . Произведение двух множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнения:  $x - 1 = 0$  (корень  $x_1 = 1$ ) и  $x^2 + x - 2 = 0$  (корни  $x_2 = 1$  и  $x_3 = -2$ ).



Найдем производную функции  $f'(x) = -3x^2 + 3$ . Производная равна нулю в точках  $x = \pm 1$  (критические точки). На диаграмме приведены знаки производной  $f'(x)$ . Функция  $f(x)$  возрастает на промежутке  $[-1; 1]$  и убывает на промежутках  $(-\infty; -1]$  и  $[1; \infty)$ . Точка  $x = -1$  — точка минимума и  $f(-1) = -(-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 2 = -4$ , точка  $x = 1$  — точка максимума и  $f(1) = -1^3 + 3 \cdot 1 - 2 = 0$ . Учитывая перечисленные свойства функции  $f(x)$ , построим ее график.

Ответ: см. решение.

**2986)** Найдём производную функции  $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 6x + 1$ .

Получаем  $f'(x) = \frac{5x^4}{5} - \frac{3x^2}{3} - 6 = x^4 - x^2 - 6$ . Для нахождения критических точек функции приравняем производную нулю и получим биквадратное уравнение  $x^4 - x^2 - 6 = 0$ . Введём новую неизвестную  $t = x^2 \geq 0$ . Имеем квадратное уравнение  $t^2 - t - 6 = 0$ , корни которого  $t_1 = -2$  (не подходит, т.к.  $t \geq 0$ ) и  $t_2 = 3$ . Теперь найдём  $x = \pm\sqrt{3}$ . Отметим эти точки на координатной оси и построим диаграмму



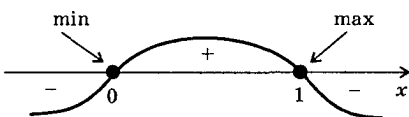
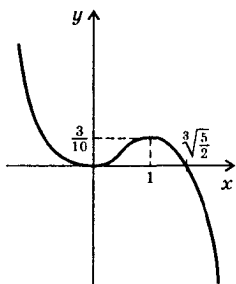
знаков производной  $f'(x)$ . Из диаграммы видно, что функция возрастает на промежутках  $(-\infty; -\sqrt{3}]$  и  $[\sqrt{3}; \infty)$ , убывает на промежутке  $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ .

Ответ:  $(-\infty; -\sqrt{3}]$ ,  $[\sqrt{3}; \infty)$  — промежутки возрастания,  $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$  — промежуток убывания.

**299a)** Функция  $f(x) = 2x - \cos x$  определена на  $R$ . Найдём производную  $f'(x) = 2 + \sin x$ . Определим знак этого выражения. В силу ограниченности функции синус выполняется неравенство  $-1 \leq \sin x \leq 1$ . Прибавим ко всем частям неравенства число 2 и получим  $1 \leq 2 + \sin x \leq 3$  или  $1 \leq f'(x) \leq 3$ . Видно, что при всех значениях  $x$  производная  $f'(x)$  положительна. Следовательно, функция  $f(x)$  возрастает на  $R$ . Ответ: доказано.

**300a)** Функция  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5$  определена на  $R$ . Найдём точки пересечения графика функции с осями координат. С осью ординат: положим  $x = 0$  и найдём  $y = f(0) = 0$ . С осью абсцисс: положим  $f(x) = 0$  и получим уравнение:  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5 = 0$  или  $x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}x^3\right) = 0$ . Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнения:  $x^2 = 0$  (корень  $x = 0$ ) и  $\frac{1}{2} - \frac{1}{5}x^3 = 0$  (корень  $x = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ ).

Найдём производную  $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x - \frac{1}{5} \cdot 5x^4 = x - x^4 = x(1 - x^3)$ . Приравняем производную нулю и получим критические точки  $x = 0$  и  $x = 1$ . На диаграмме приведены знаки производной  $f'(x)$ . В точке  $x = 0$  функция имеет минимум и он равен  $f(0) = 0$ . В точке



$x = 1$  достигается максимум и он равен  $f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{5} \cdot 1^5 = \frac{3}{10}$ . Функция  $f(x)$  возрастает на промежутке  $[0; 1]$  и убывает на промежутках  $(-\infty; 0]$  и  $[1; \infty)$ . Учитывая перечисленные свойства функции, построим ее график.

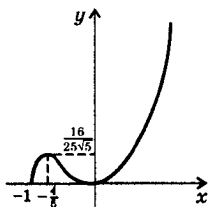
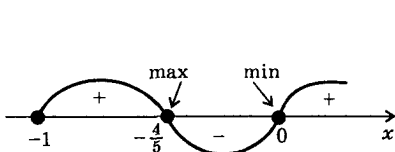
**Ответ:** см. решение.

**301a)** Область определения функции  $f(x) = x^2 \sqrt{1+x}$  задается условием  $1+x \geq 0$ , откуда  $x \geq -1$ . График проходит через начало координат и имеет общую точку  $x = -1$  с осью абсцисс.

Найдем производную  $f'(x) = (x^2)' \sqrt{1+x} + x^2 \cdot (\sqrt{1+x})' = 2x\sqrt{1+x} + \frac{x^2}{2\sqrt{1+x}} = \frac{4x(1+x) + x^2}{2\sqrt{1+x}} = \frac{5x^2 + 4x}{2\sqrt{1+x}}$ . Приравняем производную нулю  $\frac{5x^2 + 4x}{2\sqrt{1+x}} = 0$  и получим критические точки функции  $x = -\frac{4}{5}$  и  $x = 0$ .

На диаграмме приведены знаки производной. Функция возрастает на промежутках  $[-1; -\frac{4}{5}]$  и  $[0; \infty)$ , убывает на промежутке  $[-\frac{4}{5}; 0]$ .

Функция  $f(x)$  в точке  $x = -\frac{4}{5}$  имеет максимум, равный  $f(-\frac{4}{5}) = (-\frac{4}{5})^2 \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{16}{25\sqrt{5}}$ . В точке  $x = 0$  функция  $f(x)$  имеет минимум  $f(0) = 0$ . Учитывая перечисленные свойства функции  $f(x)$ , построим ее график.



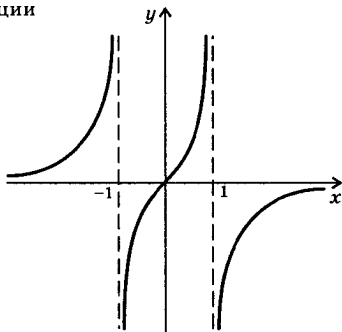
**Ответ:** см. решение.

**301г)** Функция  $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$  определена при  $x \neq \pm 1$ , т.е.  $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$ . Функция проходит через начало координат. Функция является нечетной.

Найдем производную функции

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \frac{(x)(1-x^2) - x \cdot (1-x^2)'}{(1-x^2)^2} = \\ &= 2 \frac{1-x^2 - x(-2x)}{(1-x^2)^2} = 2 \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}. \end{aligned}$$

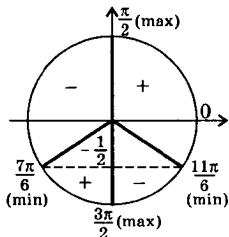
Видно, что производная  $f'(x)$  положительна в области определения  $D(f)$ . Поэтому функция  $f(x)$  возрастает. Полезно также рассмотреть промежутки знакопостоянства функции  $f(x)$ . Учитывая перечисленные свойства функции  $f(x)$ , построим ее график.



Ответ: см. решение.

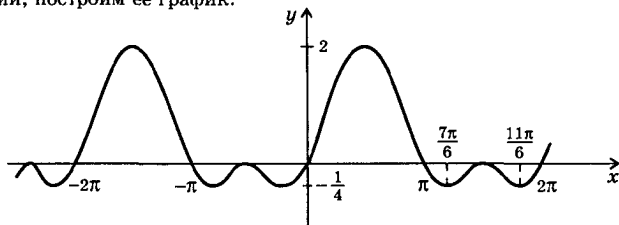
**302а)** Функция  $f(x) = \sin^2 x + \sin x$  определена на  $\mathbb{R}$ . График функции проходит через начало координат. Найдем точки пересечения с осью абсцисс. Положим  $f(x) = 0$  и получим уравнение:  $\sin^2 x + \sin x = 0$  или  $\sin x (\sin x + 1) = 0$ . Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнения:  $\sin x = 0$  (корни  $x = \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ) и  $\sin x + 1 = 0$  (или  $\sin x = -1$ , откуда  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Найдем производную функции  $f'(x) = 2\sin x \cos x + \cos x = \cos x (2\sin x + 1)$ . Приравняем  $f'(x)$  нулю. Получаем уравнение  $\cos x (2\sin x + 1) = 0$  для нахождения критических точек. Так как функции  $f(x)$  и  $f'(x)$  периодичны с периодом  $2\pi$ , то решим это уравнение на промежутке  $[0; 2\pi]$  с помощью тригонометрического круга. На круге указаны знаки производной и ее минимумы и максимумы. Найдем значения функции в критических точках:



$$\begin{aligned} \text{ких точках: } f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin^2 \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2, \quad f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin^2 \frac{7\pi}{6} + \sin \frac{7\pi}{6} = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin^2 \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} = 1 - 1 = 0, \quad f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sin^2 \frac{11\pi}{6} + \sin \frac{11\pi}{6} = \end{aligned}$$

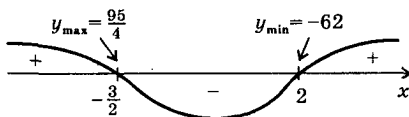
$+\sin \frac{11\pi}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ . Учитывая перечисленные свойства функции, построим ее график.



**Ответ:** см. решение.

**303а)** Для функции  $f(x) = \operatorname{tg} x - x$  найдем производную  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$ . На промежутке  $I = \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  величина  $\cos x$  удовлетворяет неравенству  $0 < \cos x < 1$ . Тогда  $0 < \cos^2 x < 1$  и выражение  $1 - \cos^2 x > 0$ . Следовательно, производная  $f'(x)$  на промежутке  $I$  положительна и функция  $f(x)$  возрастает. Найдем значение  $f(0) = \operatorname{tg} 0 - 0 = 0$ . Тогда значения  $f(x) > f(0)$  или  $f(x) > 0$  на этом промежутке. **Ответ:** доказано.

**304а)** Для анализа уравнения  $4x^3 - 3x^2 - 36x - 10 = 0$  рассмотрим функцию  $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 36x - 10$ . Найдем производную  $f'(x) = 4 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x - 36 = 6 \cdot (2x^2 - x - 6)$ . Приравняем производную нулю и найдем критические точки функции  $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4}$ , т.е.  $x_1 = -\frac{3}{2}$  и  $x_2 = 2$ . Отметим эти точки на координатной оси и построим диаграмму знаков производной. Найдем  $y_{\max} = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 36 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 10 = -\frac{27}{2} - \frac{27}{4} + 54 - 10 = \frac{95}{4}$  и  $y_{\min} = f(2) = 4 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 - 10 = 32 - 12 - 72 - 10 = -62$ .



На промежутке  $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$  функция возрастает и  $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{95}{4} > 0$

Поэтому на этом промежутке функция имеет единственный ко-

рень. На промежутке  $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$  функция убывает и значения функции на концах промежутка имеют разные знаки. Поэтому и на этом промежутке функция имеет один корень. На промежутке  $[2; \infty)$  функция возрастает и  $f(2) = -62 < 0$ . Следовательно, и на этом промежутке функция имеет корень. Таким образом данное уравнение имеет три корня. Ответ: три корня.

**305а)** Найдём производную функции  $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$  и получим  $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$ . Приравняем производную нулю и найдём критические точки функции  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -2$  и  $x_3 = 2$ .

На промежутке  $[-1; 1]$  есть критическая точка  $x = 0$ . Поэтому найдём значения функции в этой точке и на концах промежутка:  $f(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^2 - 9 = -9$ ;  $f(-1) = (-1)^4 - 8 \cdot (-1)^2 - 9 = -16$  и  $f(1) = 1^4 - 8 \cdot 1^2 - 9 = -16$ . Теперь из этих трех значений выберем наибольшее и наименьшее значение:  $\max_{[-1; 1]} f(x) = f(0) = -9$  и  $\min_{[-1; 1]} f(x) = f(-1) = f(1) = -16$ .

На промежутке  $[0; 3]$  есть две критические точки  $x = 0$  и  $x = 2$ . Уже было найдено значение  $f(0) = -9$ . Найдём значения  $f(2) = 2^4 - 8 \cdot 1^2 - 9 = -25$  и  $f(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^2 - 9 = 0$ . Теперь из этих трех значений выберем наибольшее и наименьшее значение:  $\max_{[0; 3]} f(x) = f(3) = 0$  и  $\min_{[0; 3]} f(x) = f(2) = -25$ .

Ответ:  $\max_{[-1; 1]} f(x) = f(0) = -9$ ,  $\min_{[-1; 1]} f(x) = f(-1) = f(1) = -16$ ;  
 $\max_{[0; 3]} f(x) = f(3) = 0$ ,  $\min_{[0; 3]} f(x) = f(2) = -25$ .

**306а)** Найдём производную функции  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$  и получим  $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3)$ . Приравняем производную нулю и получим критические точки функции  $x_1 = -3$  и  $x_2 = 1$ .

На промежутке  $P_1 = [-4; 0]$  находится критическая точка  $x = -3$ . Поэтому найдём значения функции  $f(x)$  в этой точке и на концах промежутка:  $f(-3) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) = 27$ ;  $f(-4) = (-4)^3 + 3 \cdot (-4)^2 - 9 \cdot (-4) = 20$  и  $f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 9 \cdot 0 = 0$ . Тогда наибольшее значение функции на промежутке  $P_1$ :  $\max_{[-4; 0]} f(x) = f(-3) = 27$ .

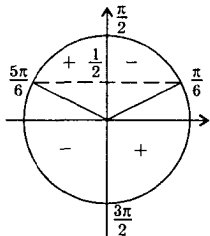
На промежутке  $P_2 = [3; 4]$  критических точек функции  $f(x)$  нет. Поэтому найдём значения функции на концах промежутка:  $f(3) = 3^3 + 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 = 27$  и  $f(4) = 4^3 + 3 \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 = 76$ . Выберем наименьшее из этих значений:  $\min_{[3; 4]} f(x) = f(3) = 27$ .

Из сравнения видно, что  $\max_{[-4; 0]} f(x) = \min_{[3; 4]} f(x) = 27$ .

Ответ:  $\max_{[-4; 0]} f(x) = \min_{[3; 4]} f(x)$ .

**307)** Учтем, что скорость — производная пути по времени, т.е.  $v = S'(t)$ . Тогда для пути  $S(t) = 12t^2 - \frac{2}{3}t^3$  найдем скорость  $v = 24t - 2t^2$ . Определим наибольшее значение этой скорости на промежутке  $[4; 10]$ . Найдем производную функции  $v(t)$  и получим  $v' = 24 - 4t$ . Единственная критическая точка этой функции  $t = 6$ . Вычислим  $v(6) = 24 \cdot 6 - 2 \cdot 6^2 = 144 - 72 = 72$ . Ответ: 6 с; 72 м/с.

**310а)** Найдем производную функции  $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$  и получим  $f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x$ . Определим критические точки. Имеем уравнение:  $2\cos x - 2\sin 2x = 0$ . Используем формулу для синуса двойного аргумента и получим:  $2\cos x - 4\sin x \cos x = 0$  или  $2\cos x(1 - 2\sin x) = 0$ . Так как произведение двух множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем уравнения:  $\cos x = 0$  и  $1 - 2\sin x = 0$ . На промежутке  $[0; 2\pi]$  найдем решения этих уравнений с помощью тригонометрического круга. Получаем четыре ре-



шения:  $\frac{\pi}{6}$ ;  $\frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{5\pi}{6}$  и  $\frac{3}{2}\pi$ . На круге также

отмечены знаки производной  $f'(x)$ . Найдем значения функции  $f(x)$  в этих критических точках и на концах промежутка. Получаем:

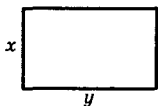
$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 2\sin\frac{\pi}{6} + \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} + \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= 2 \cdot 1 - 1 = 1; \quad f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{5\pi}{6} + \cos\left(2 \cdot \frac{5\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\frac{5\pi}{3} = \\ &= 2\sin\frac{\pi}{6} + \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + \cos\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}; \quad f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 2\sin\frac{3}{2}\pi + \\ &+ \cos\left(2 \cdot \frac{3}{2}\pi\right) = 2 \cdot (-1) + \cos 3\pi = -2 + \cos(2\pi + \pi) = -2 + \cos\pi = \\ &= -2 - 1 = -3; \quad f(0) = f(2\pi) = 2\sin 0 + \cos(2 \cdot 0) = 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Сравнивая эти значения, найдем:  $\max_{[0; 2\pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$  и

$$\min_{[0; 2\pi]} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -3.$$

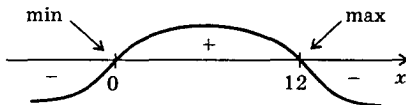
Ответ:  $\max_{[0; 2\pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$  и  $\min_{[0; 2\pi]} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -3$ .

311) Пусть число 24 равно сумме двух неотрицательных чисел  $x$  и  $y$ , т.е.  $x + y = 24$  (откуда  $y = 24 - x$ ). Тогда сумма квадратов чисел  $x$  и  $y$  равна  $x^2 + y^2 = x^2 + (24 - x)^2 = x^2 + 576 - 48x + x^2 = 2x^2 - 48x + 576$ . Рассмотрим функцию  $f(x) = 2x^2 - 48x + 576$  и определим ее наименьшее значение. Найдем производную этой функции  $f'(x) = 4x - 48$ . Функция имеет единственную критическую точку  $x = 12$  (точка минимума). Таким образом, условия задачи выполняются, если число 24 представить в виде суммы двух одинаковых чисел 12, т.е.  $24 = 12 + 12$ . Ответ: 12+12.



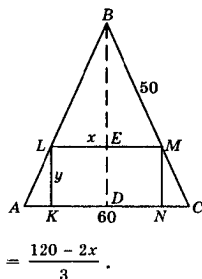
313). Пусть стороны прямоугольника  $x$  (м) и  $y$  (м). Тогда его периметр  $2x + 2y = 48$  (по условию), откуда  $y = 24 - x$ . Запишем площадь прямоугольника  $S = xy = x(24 - x) = 24x - x^2$ . По условию задачи такая площадь должна быть наибольшей. Найдем производную  $S'(x) = 24 - 2x$ . Функция имеет единственную критическую точку  $x = 12$  (м). Тогда  $y = 24 - x = 24 - 12 = 12$  (м). Таким образом, из всех прямоугольников с периметром 48 м наибольшую площадь имеет квадрат со стороной 12 м. Ответ: 12 м; 12 м.

314) Так как в числителе 54 два слагаемых пропорциональны числам 1 и 2, то их можно записать в виде  $x$  и  $2x$ . Тогда третье слагаемое равно  $54 - 3x$ . Произведение всех трех слагаемых  $f(x) = x \cdot 2x \cdot (54 - 3x) = 6x^2(18 - x) = 6(18x^2 - x^3)$ . Найдем производную функции  $f(x)$ . Получаем  $f'(x) = 6 \cdot (36x - 3x^2) = 6 \cdot 3 \cdot x(12 - x) = 18x(12 - x)$ . Функция имеет две критические точки  $x = 0$  и  $x = 12$ . На диаграмме приведены знаки производной  $f'(x)$ . Видно,



что точка  $x = 12$  — точка максимума. Тогда число 54 надо представить в виде слагаемых  $x = 12$ ,  $2x = 24$  и  $54 - 3x = 18$ , т.е.  $54 = 12 + 24 + 18$ . Ответ: 12 + 24 + 18.

318) В равнобедренный треугольник  $ABC$  (где  $AC = 60$  см и  $BC = 50$  см) вписан прямоугольник  $KLMN$ . Пусть сторона  $LM = x$  (см) и сторона  $LK = y$  (см). Найдем связь между величинами  $x$  и  $y$ .

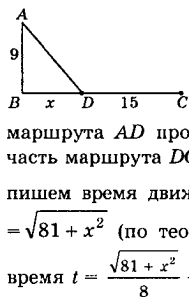


Проведем высоту  $BD$  треугольника  $ABC$ . Рассмотрим подобные треугольники  $BLM$  и  $ABC$ . Тогда  $\frac{LM}{AC} = \frac{BE}{BD}$ , где  $LM = x$ ,  $AC = 60$ ,  $BD = \sqrt{BC^2 - DC^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$  и  $BE = BD - ED = 40 - y$ . Получаем:  $\frac{x}{60} = \frac{40 - y}{40}$  или  $\frac{x}{3} = \frac{40 - y}{2}$  или  $2x = 120 - 3y$ , откуда  $y =$

$$= \frac{120 - 2x}{3}.$$

Площадь прямоугольника  $KLMN$  равна  $S = LM \cdot LK = xy = x \times \left(\frac{120 - 2x}{3}\right) = \frac{120x - 2x^2}{3}$ . По условию площадь  $S$  наибольшая. Найдём производную  $S'(x) = \frac{1}{3}(120 - 4x)$ . Приравняем производную нулю и получим критическую точку  $x = 30$  (точка максимума). Теперь найдём  $y = \frac{120 - 2x}{3} = \frac{120 - 2 \cdot 30}{3} = 20$ . Следовательно, прямоугольник наибольшей площади имеет стороны 30 см и 20 см.

Ответ: 30 см и 20 см.



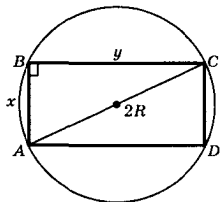
**320)** Расположение объектов приведено на рисунке:  $A$  — буровая вышка,  $B$  — ближайшая к ней точка на шоссе,  $C$  — пункт назначения. Пусть курьер движется по маршруту  $ADC$ , так что расстояние  $BD = x$  (км). Часть маршрута  $AD$  проходит по полю (где скорость курьера 8 км/ч), часть маршрута  $DC$  — по шоссе (где скорость курьера 10 км/ч). Запишем время движения  $t$  курьера. Учтем, что  $AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{81 + x^2}$  (по теореме Пифагора) и  $DC = BC - BD = 15 - x$ . Тогда время  $t = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{8} + \frac{15 - x}{10}$ .

Найдём производную функции  $t(x)$  и получим:  $t' = \frac{1}{8} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{10} = \frac{x}{8\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{10}$ . Приравняем эту производную нулю. Имеем уравнение:  $\frac{x}{8\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{10} = 0$  или  $\frac{x}{\sqrt{81 + x^2}} = \frac{4}{5}$ . Возведём обе части уравнения в квадрат:  $\frac{x^2}{81 + x^2} = \frac{16}{25}$ . Используя свойство пропорции, получаем  $25x^2 = 16 \cdot 81 + 16x^2$  или  $9x^2 = 16 \cdot 81$  или  $x^2 = 16 \cdot 9$ , отку-

да  $x = 4 \cdot 3 = 12$  (км). Нетрудно показать, что  $x = 12$  — точка минимума. **Ответ:**  $BD = 12$  км.

**322)** Пусть  $x$  — искомое число. Тогда сумма числа и его квадрата равна  $x + x^2$ . Рассмотрим функцию  $f(x) = x + x^2$ . Найдем производную  $f'(x) = 1 + 2x$ . Приравняем эту производную нулю  $1 + 2x = 0$  и получим критическую точку  $x = -\frac{1}{2} = -0,5$ . Легко показать, что эта точка минимума. Итак, сумма числа и его квадрата наименьшая, если число равно  $(-0,5)$ . **Ответ:**  $-0,5$ .

**324)** Пусть в окружность радиуса  $R$  вписан прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = x$  и  $BC = y$ . Диагональ  $AC$  равна диаметру окружности, т.к.  $\angle ABC = 90^\circ$  и опирается на диаметр. Для прямоугольного треугольника  $ABC$  запишем теорему Пифагора:  $AB^2 + BC^2 = AC^2$  или  $x^2 + y^2 = (2R)^2$ , откуда  $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$ . Площадь прямоугольника  $S = AB \cdot BC = xy = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ .



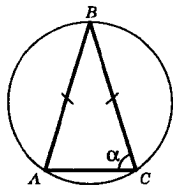
Найдем производную функции  $S(x)$ . Получаем:

$$S' = \left( x\sqrt{4R^2 - x^2} \right)' = (x)' \sqrt{4R^2 - x^2} + x \left( \sqrt{4R^2 - x^2} \right)' = \sqrt{4R^2 - x^2} + x \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{2(2R^2 - x^2)}{\sqrt{4R^2 - x^2}}.$$

Приравняем производную нулю и получим уравнение для нахождения критической точки  $2R^2 - x^2 = 0$ , откуда  $x = R\sqrt{2}$ . Легко проверить, что эта точка — точка максимума. Теперь найдем  $y = \sqrt{4R^2 - x^2} = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = R\sqrt{2}$ . Видно, что  $x = y = R\sqrt{2}$ . Таким образом, из всех прямоугольников, вписанных в окружность, наибольшую площадь имеет квадрат. **Ответ:** квадрат.

**325)** В окружность радиуса  $R$  вписан равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ). Пусть  $\angle A = \angle C = \alpha$ . По теореме о сумме углов треугольника  $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 2\alpha$ .

Запишем также теорему синусов:  $\frac{AB}{\sin C} = 2R$ , откуда  $AB = 2R \sin C = 2R \sin \alpha$ . Теперь легко найти площадь  $\triangle ABC$ :  $S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2} \times \times 2R \cdot \sin \alpha \cdot 2R \cdot \sin \alpha \cdot \sin (180^\circ - 2\alpha) = 2R^2 \sin^2 \alpha \times \times \sin 2\alpha$ .



Найдем производную функции  $S(\alpha)$  и получим:  $S'(\alpha) = 2R^2 \times (\sin^2 \alpha \sin^2 2\alpha)' = 2R^2 [(\sin^2 \alpha)' \sin^2 2\alpha + \sin^2 \alpha (\sin^2 2\alpha)'] = 2R^2 (2\sin \alpha \times \cos \alpha \sin 2\alpha + \sin^2 \alpha \cos 2\alpha \cdot 2) = 2R^2 (\sin^2 2\alpha + 2\sin^2 \alpha \cos 2\alpha)$ . Приравняем эту производную нулю и получим тригонометрическое уравнение  $\sin^2 2\alpha + 2\sin^2 \alpha \cos 2\alpha = 0$ . Для его решения используем формулу понижения степени  $2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$ . Тогда уравнение имеет вид:  $\sin^2 2\alpha + (1 - \cos 2\alpha) \cos 2\alpha = 0$  или  $1 - \cos^2 2\alpha + \cos 2\alpha - \cos^2 2\alpha = 0$  или  $0 = 2\cos^2 2\alpha - \cos 2\alpha - 1$ . Введем новую переменную  $t = \cos 2\alpha$  и получим квадратное уравнение  $0 = 2t^2 - t - 1$ , корни которого  $t_1 = 1$  и  $t_2 = -\frac{1}{2}$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем уравнения.

а)  $\cos 2\alpha = 1$ , тогда  $2\alpha = 2\pi n$  и  $\alpha = \pi n$ . Очевидно, что треугольник таких углов иметь не может.

б)  $\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$ , тогда  $2\alpha = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$  и  $\alpha = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$ . Очевидно, что из всех решений в треугольнике может быть только угол  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

Таким образом, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

Ответ: доказано.

### Глава III. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

#### § 7. Первообразная

**326а)** Функция  $F(x) = x^5$  определена при  $x \in (-\infty; \infty)$ . Найдем производную этой функции  $F'(x) = (x^5)' = 5x^4$ . Функция  $F'(x)$  также определена при  $x \in (-\infty; \infty)$ . Видно, что  $F'(x) = f(x) = 5x^4$ . Следовательно, функция  $F(x) = x^5$  является первообразной для функции  $f(x) = 5x^4$  на промежутке  $x \in (-\infty; \infty)$  по определению.

Ответ: доказано.

**327а)** Функция  $F(x) = 3 - \sin x$  определена при  $x \in (-\infty; \infty)$ . Найдем производную этой функции  $F'(x) = (3 - \sin x)' = (3)' - (\sin x)' = 0 - \cos x = -\cos x$ . Видно, что функция  $F'(x) = -\cos x$  не равна функции  $f(x) = \cos x$ . Следовательно, функция  $F(x) = 3 - \sin x$  не является первообразной для функции  $f(x) = \cos x$  на промежутке  $x \in (-\infty; \infty)$  (а также на любом другом промежутке).

Ответ: не является.

**328б)** Одной из первообразных для функции  $f(x) = \cos x$  является функция  $F(x) = \sin x - 7,3$ . Функции  $f(x)$  и  $F(x)$  определены на  $\mathbb{R}$ .

Найдем производную  $F'(x) = (\sin x - 7,3)' = (\sin x)' - (7,3)' = \cos x - 0 = \cos x$ . Видно, что  $F'(x) = f(x)$ . По определению функция  $F(x) = \sin x - 7,3$  первообразная для функции  $f(x) = \cos x$ .

Ответ:  $F(x) = \sin x - 7,3$ .

**3296)** Одной из первообразных для функции  $f(x) = -x$  является функция  $F(x) = -\frac{x^2}{2} + 4,8$ . Функции  $f(x)$  и  $F(x)$  определены на  $R$ .

Найдем производную  $F'(x) = \left(-\frac{x^2}{2} + 4,8\right)' = \left(-\frac{x^2}{2}\right)' + (4,8)' = -\frac{1}{2}(x^2)' + 0 = -\frac{1}{2} \cdot 2x = -x$ . Видно, что  $F'(x) = f(x)$ . По определению функция  $F(x) = -\frac{x^2}{2} + 4,8$  первообразная для функции  $f(x)$ .

Ответ:  $F(x) = -\frac{x^2}{2} + 4,8$ .

**330а)** Функции  $F(x) = \sin^2 x$  и  $f(x) = \sin 2x$  определены на  $R$ . Найдем производную функции  $F(x)$  и получим  $F'(x) = (\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$ . Видно, что  $F'(x) = f(x)$ . По определению функция  $F(x)$  первообразная для функции  $f(x)$ .

Ответ: доказано.

**331в)** Функции  $F(x) = \frac{1}{x^2}$  и  $f(x) = 14 - \frac{1}{x^2}$  в промежутке  $x \in (0; \infty)$  определены. Найдем производную  $F'(x) = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$ . Видно, что  $F'(x) \neq f(x)$ . Следовательно, функция  $F(x)$  не является первообразной для функции  $f(x)$ . Ответ: не является.

**331г)** Функции  $F(x) = 4x\sqrt{x}$  и  $f(x) = 6\sqrt{x}$  в промежутке  $x \in (0; \infty)$  определены. Найдем производную  $F'(x) = (4x\sqrt{x})' = 4(x \cdot x^{\frac{1}{2}})' = 4(x^{\frac{3}{2}})' = 4 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{x}$ . Видно, что  $F'(x) = f(x)$ . По определению функция  $F(x) = 4x\sqrt{x}$  первообразная для функции  $f(x) = 6\sqrt{x}$ .

Ответ: является.

**3326)** Сначала преобразуем функцию  $f(x) = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 = \sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right) - \left(2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right) = 1 - \sin x$ . Одной из первообразных для функции  $f(x)$  является функция  $F(x) = x + \cos x + 1,3$ . Функции  $f(x)$  и  $F(x)$  определены на  $R$ . Найдем производную  $F'(x) = (x + \cos x + 1,3)' = (x)' + (\cos x)' + (1,3)' = 1 - \sin x + 0 = 1 - \sin x$ . Видно, что  $F'(x) = f(x)$ . Следовательно, функция  $F(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$ .

Ответ:  $F(x) = x + \cos x + 1,3$ .

**333в)** Такими первообразными для функции  $f(x) = x^2$  являются, например, функции  $F_1(x) = \frac{x^3}{3} - 2$  и  $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 5$ . Функции  $f(x)$ ,  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  определены на  $R$ . Найдем производные

$$F_1'(x) = \left( \frac{x^3}{3} - 2 \right)' = \left( \frac{x^3}{3} \right)' - (2)' = \frac{1}{3}(x^3)' - 0 = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 \text{ и}$$

$$F_2'(x) = \left( \frac{x^3}{3} + 5 \right)' = \left( \frac{x^3}{3} \right)' + (5)' = \frac{1}{3}(x^3)' + 0 = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2.$$

Видно, что  $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ . Следовательно, функции  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  являются первообразными для функции  $f(x)$ .

Ответ:  $F_1(x) = \frac{x^3}{3} - 2$ ,  $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 5$ .

**334б)** Рассмотрим функции  $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x$ ,  $g(x) = 1 + \cos x$ ,  $h(x) = x + \sin x$ . Все эти функции определены на  $R$ . Найдем производ-

ную  $f'(x) = \left( \frac{x^2}{2} - \cos x \right)' = \left( \frac{x^2}{2} \right)' - (\cos x)' = \frac{1}{2}(x^2)' - (-\sin x) = \frac{1}{2} \cdot 2x +$

$+\sin x = x + \sin x$ . Видно, что  $f'(x) = h(x)$ . Следовательно, функция  $f(x)$  является первообразной для функции  $h(x)$ . Теперь найдем производную  $h'(x) = (x + \sin x)' = (x)' + (\sin x)' = 1 + \cos x$ . Видно, что  $h'(x) = g(x)$ . Поэтому функция  $g(x)$  является производной для функции  $h(x)$ .

Таким образом, для функции  $h(x)$  функция  $f(x)$  является первообразной, а функция  $g(x)$  является производной.

Ответ:  $h(x)$ .

**335б)** Используя таблицу, найдем общий вид первообразных для функции  $f(x) = x + \cos x$ . Получаем  $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + c$ . Про-

верим это. Найдем производную  $F'(x) = \left( \frac{x^2}{2} + \sin x + c \right)' = \left( \frac{x^2}{2} \right)' + (\sin x)' + c' = \frac{1}{2} \cdot 2x + \cos x + 0 = x + \cos x$ . Видно, что  $F'(x) = f(x)$ .

Ответ:  $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + c$ .

**336б)** Запишем функцию  $f(x) = \frac{1}{x^3} - 2$  в виде  $f(x) = x^{-3} - 2$ . Учитывая таблицу, найдем общий вид первообразных для функции  $f(x)$ . Получаем  $F(x) = \frac{x^{-2}}{-2} - 2x + c = -\frac{1}{2x^2} - 2x + c$ . Проверим это. Най-

дем производную  $F'(x) = \left(-\frac{1}{2}x^{-2} - 2x + c\right)' = \left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)' - (2x)' + c' =$   
 $= -\frac{1}{2} \cdot (x^{-2})' - 2(x)' + 0 = -\frac{1}{2} \cdot (-2x^{-3}) - 2 \cdot 1 = x^{-3} - 2 = \frac{1}{x^3} - 2$ . Видно,  
 что  $F'(x) = f(x)$ .

Ответ:  $F(x) = -\frac{1}{2x^2} - 2x + c$ .

**337а)** Функцию  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  запишем в виде  $f(x) = x^{-2}$ . Учитывая таблицу, найдем общий вид первообразных для функции  $f(x)$ . Получаем  $F(x) = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$ . По условию задачи известно  $F\left(\frac{1}{2}\right) = -12$ . Подставим значение  $x = \frac{1}{2}$  в общий вид первообразных:  $-\frac{1}{1/2} + c = -12$  или  $-2 + c = -12$ , откуда  $c = -10$ . Таким образом, искомая первообразная  $F(x) = -\frac{1}{x} - 10$ . Ответ:  $F(x) = -\frac{1}{x} - 10$ .

**337б)** Используя таблицу, найдем общий вид первообразных для функции  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ . Получаем  $F(x) = \operatorname{tg} x + c$ . По условию задачи известно  $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ . Подставим значение  $x = \frac{\pi}{4}$  в общий вид первообразных:  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + c = 0$  или  $1 + c = 0$ , откуда  $c = -1$ . Тогда искомая первообразная  $F(x) = \operatorname{tg} x - 1$ . Ответ:  $F(x) = \operatorname{tg} x - 1$ .

**338а)** Найдем производную функции  $F(x) = \sin x - x \cos x$ . Получаем:  $F'(x) = (\sin x - x \cos x)' = (\sin x)' - (x \cos x)' = \cos x - ((x)' \cos x + x (\cos x)') = \cos x - (1 \cdot \cos x + x (-\sin x)) = \cos x - (\cos x - x \sin x) = x \sin x$ . Видно, что  $F'(x) = f(x)$ . Следовательно, функция  $F(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$ . Тогда общий вид первообразных  $F(x) = \sin x - x \cos x + c$ . Ответ:  $F(x) = \sin x - x \cos x + c$ .

**338б)** Найдем производную функции  $F(x) = \sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{1/2}$ . Получаем:  $F'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ . Видно, что  $F'(x) = f(x)$ . Следовательно, функция  $F(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$ . Тогда общий вид первообразных  $F(x) = \sqrt{x^2 + 1} + c$ . Ответ:  $F(x) = \sqrt{x^2 + 1} + c$ .

**339а)** Найдем общий вид первообразных для функции  $f(x) = 2\cos x$ . Получаем  $F(x) = 2\sin x + c$ . Известно, что график первообразной проходит через точку  $M\left(-\frac{\pi}{2}; 1\right)$ . Подставим координаты

этой точки в общий вид первообразных:  $1 = 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + c$  или  $1 = 2 \cdot (-1) + c$ , откуда  $c = 3$ . Тогда искомая первообразная  $F(x) = 2\sin x + 3$ . Ответ:  $F(x) = 2\sin x + 3$ .

**339б)** Найдем общий вид первообразных для функции  $f(x) = 1 - x^2$ . Используя таблицу, получаем  $F(x) = x - \frac{x^3}{3} + c$ . Известно, что график первообразной проходит через точку  $M(-3; 9)$ . Подставим координаты этой точки в общий вид первообразных:  $9 = (-3) - \frac{(-3)^3}{3} + c$  или  $9 = -3 + 9 + c$ , откуда  $c = 3$ . Тогда искомая первообразная  $F(x) = x - \frac{x^3}{3} + 3$ . Ответ:  $F(x) = x - \frac{x^3}{3} + 3$ .

**340б)** Функцию  $f(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$  запишем в виде  $f(x) = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ . Используя таблицу, найдем общий вид первообразных для функции  $f(x)$  и получим  $F(x) = \operatorname{tg} x + c$ . Расстояние между соответствующими точками графиков первообразных равно  $a = 1$ . Это означает, что постоянные для функций  $F(x)$  должны отличаться на величину  $a$ . Тогда можно выбрать, например, функции  $F_1(x) = \operatorname{tg} x + 3$  и  $F_2(x) = \operatorname{tg} x + 4$ .

Ответ:  $F_1(x) = \operatorname{tg} x + 3$ ,  $F_2(x) = \operatorname{tg} x + 4$ .

**340в)** Функцию  $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}$ , используя формулы понижения степени, запишем в виде  $f(x) = \frac{1 - \cos x}{2} - \frac{1 + \cos x}{2} = -\cos x$ . Учитывая таблицу, найдем общий вид первообразных для функции  $f(x)$  и получим  $F(x) = -\sin x + c$ . Расстояние между соответствующими точками графиков первообразных равно  $a = 0,5$ . Это означает, что постоянные для функций  $F(x)$  должны отличаться на величину  $a$ . Тогда можно выбрать, например, функции  $F_1(x) = -\sin x + 0,5$  и  $F_2(x) = -\sin x + 1$ .

Ответ:  $F_1(x) = -\sin x + 0,5$ ,  $F_2(x) = -\sin x + 1$ .

**341а)** Известно, что ускорение точки  $a(t) = -2t$ . Найдем скорость  $v(t)$ , учитывая, что скорость — первообразная для ускорения. Получаем:  $v(t) = -2 \frac{t^2}{2} + c_1 = -t^2 + c_1$ . Известно, что в момент времени

$t_0 = 1$  скорость точки  $v_0 = 2$ . Подставим эти значения в функцию  $v(t)$ . Имеем:  $2 = -1^2 + c_1$ , откуда  $c_1 = 3$ . Тогда скорость точки  $v(t) = -t^2 + 3$ . Теперь найдем координату  $x(t)$ , учитывая, что координата — первообразная для скорости. Получаем:  $x(t) = -\frac{t^3}{3} + 3t + c_2$ . В момент времени  $t_0 = 1$  координата точки  $x_0 = 4$ . Подставим эти значения в функцию  $x(t)$ . Имеем:  $4 = -\frac{1^3}{3} + 3 \cdot 1 + c_2$  или  $4 = -\frac{1}{3} + 3 + c_2$ , откуда  $c_2 = \frac{4}{3}$ . Тогда координата точки  $x(t) = -\frac{t^3}{3} + 3t + \frac{4}{3}$ .

Ответ:  $x(t) = -\frac{t^3}{3} + 3t + \frac{4}{3}$ .

**342б)** Учитывая таблицу и правила нахождения первообразных, для функции  $f(x) = x - \frac{2}{x^5} + \cos x = x - 2x^{-5} + \cos x$  получим  $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2 \frac{x^{-4}}{-4} + \sin x + c = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^4} + \sin x + c$ . Проверим это.

Найдем производную  $F'(x) = \left( \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^{-4} + \sin x + c \right)' = \left( \frac{1}{2}x^2 \right)' + \left( \frac{1}{2}x^{-4} \right)' + (\sin x)' + c' = \frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot (-4x^{-5}) + \cos x + 0 = x - 2x^{-5} + \cos x$ . Видно, что  $F(x) = f(x)$ . Ответ:  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^4} + \sin x + c$ .

**343в)** Используя таблицу, для функции  $f(x) = x^7$  найдем первообразную  $F(x) = \frac{x^8}{8} + c$ . Тогда по правилу 3 для функции  $f(x) = (4 - 5x)^7$  первообразная  $F(x) = \frac{(4 - 5x)^8}{8} : (-5) + c = -\frac{(4 - 5x)^8}{40} + c$ .

Проверим это. Найдем производную  $F'(x) = \left( -\frac{(4 - 5x)^8}{40} + c \right)' = -\frac{1}{40} \left( (4 - 5x)^8 \right)' + c' = -\frac{1}{40} \cdot 8(4 - 5x)^7 \cdot (4 - 5x)' + 0 = -\frac{8}{40} \cdot (4 - 5x)^7 \times (-5) = (4 - 5x)^7$ . Видно, что  $F'(x) = f(x)$ . Ответ:  $F(x) = -\frac{(4 - 5x)^8}{40} + c$ .

**344г)** Функцию  $f(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{\cos^2(3x - 1)}$  запишем в виде  $f(x) = -2x^{-3} + \frac{1}{\cos^2(3x - 1)}$ . Учтем, что первообразная функции  $\frac{1}{\cos^2 x}$

есть функция  $\operatorname{tg} x$ , а первообразная функции  $\frac{1}{\cos^2(3x-1)}$  по правилу 3 есть функция  $\frac{\operatorname{tg}(3x-1)}{3}$ . Теперь находим первообразную функции  $f(x)$  и получаем

$$F(x) = -2 \frac{x^{-4}}{-4} + \frac{\operatorname{tg}(3x-1)}{3} + c = \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}(3x-1) + c.$$

Проверим это. Найдем производную

$$F'(x) = \left( \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}(3x-1) + c \right)' = \left( \frac{1}{2x^4} \right)' + \left( \frac{1}{3} \operatorname{tg}(3x-1) \right)' + c' = \frac{1}{2} (x^{-4})' + \frac{1}{3} \times$$

$$\times (\operatorname{tg}(3x-1))' + 0 = \frac{1}{2} \cdot (-4x^{-5}) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos^2(3x-1)} \cdot (3x-1)' =$$

$$= -2x^{-5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos^2(3x-1)} \cdot 3 = -\frac{2}{x^5} + \frac{1}{\cos^2(3x-1)}.$$

Видно, что  $F'(x) = f(x)$ . Ответ:  $F(x) = \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}(3x-1) + c$ .

**345г)** Запишем функцию  $f(x) = \frac{1}{x^3} - 10x^4 + 3$  в виде  $f(x) = x^{-3} - 10x^4 + 3$ . Найдем общий вид первообразных для функции  $f(x)$ . Получаем  $F(x) = \frac{x^{-2}}{-2} - 10 \frac{x^5}{5} + 3x + c = -\frac{1}{2x^2} - 2x^5 + 3x + c$ . По условию график первообразной проходит через точку  $M(1; 5)$ . Подставим координаты этой точки в общий вид первообразной:  $5 = -\frac{1}{2 \cdot 1^2} - 2 \cdot 1^5 + 3 \cdot 1 + c$  или  $5 = -\frac{1}{2} - 2 + 3 + c$ , откуда  $c = 4,5$ . Тогда искомая первообразная  $F(x) = -\frac{1}{2x^2} - 2x^5 + 3x + 4,5$ .

Ответ:  $F(x) = -\frac{1}{2x^2} - 2x^5 + 3x + 4,5$ .

**346а)** Для функции  $f(x) = 1 - \cos 3x + 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ , используя таблицу и правила нахождения первообразных, получим  $F(x) = x - \frac{\sin 3x}{3} + 2 \left( -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{-1} \right) + c = x - \frac{1}{3} \sin 3x + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + c$ . Проверим это. Найдем производную  $F'(x) = \left( x - \frac{1}{3} \sin 3x + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + c \right)' =$

$$= x' - \frac{1}{3} (\sin 3x)' + 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \right)' + c' = 1 - \frac{1}{3} \cos 3x \cdot (3x)' +$$

$$+ 2 \left( -\sin \left( \frac{\pi}{3} - x \right) \right) \cdot \left( \frac{\pi}{3} - x \right)' + 0 = 1 - \frac{1}{3} \cos 3x \cdot 3 + 2 \left( -\sin \left( \frac{\pi}{3} - x \right) \right) \times \\ \times (-1) = 1 - \cos 3x + 2 \sin \left( \frac{\pi}{3} - x \right). \text{ Видно, что } F'(x) = f(x).$$

Ответ:  $F(x) = x - \frac{1}{3} \sin 3x + 2 \cos \left( \frac{\pi}{3} - x \right) + c.$

**346г)** Функцию  $f(x) = \frac{1}{(3-2x)^3} + \frac{3}{\sqrt{5x-2}} - 2 \cos \left( \frac{\pi}{4} - x \right)$  запишем в виде  $f(x) = (3-2x)^{-3} + 3(5x-2)^{-\frac{1}{2}} - 2 \cos \left( \frac{\pi}{4} - x \right)$ . Используя таблицу и правила нахождения первообразных, получим  $F(x) =$

$$= \frac{(3-2x)^{-2}}{-2} : (-2) + 3 \frac{(5x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} : (5) - 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - x \right) : (-1) + c = \frac{1}{4(3-2x)^2} + \\ + \frac{6}{5} \sqrt{5x-2} + 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - x \right) + c. \text{ Проверим это. Найдем производную}$$

$$F'(x) = \left( \frac{1}{4(3-2x)^2} + \frac{6}{5} \sqrt{5x-2} + 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - x \right) + c \right)' = \frac{1}{4} \cdot \left( (3-2x)^{-2} \right)' + \\ + \frac{6}{5} \left( (5x-2)^{\frac{1}{2}} \right)' + 2 \left( \sin \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \right)' + c' = \frac{1}{4} \cdot (-2)(3-2x)^{-3}(3-2x)' + \frac{6}{5} \times \\ \times \frac{1}{2}(5x-2)^{-\frac{1}{2}}(5x-2)' + 2 \cos \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \cdot \left( \frac{\pi}{4} - x \right)' + 0 = \frac{1}{4}(-2) \cdot \frac{1}{(3-2x)^3} \times \\ \times (-2) + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5x-2}} \cdot 5 + 2 \cos \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \cdot (-1) = \frac{1}{(3-2x)^3} + \frac{3}{\sqrt{5x-2}} - \\ - 2 \cos \left( \frac{\pi}{4} - x \right). \text{ Видно, что } F'(x) = f(x).$$

Ответ:  $F(x) = \frac{1}{4(3-2x)^2} + \frac{6}{5} \sqrt{5x-2} + 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - x \right) + c.$

**347б)** Для функции  $f(x) = 3x^2 - 2x$  найдем общий вид первообразных  $F(x) = 3 \frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^2}{2} + c = x^3 - x^2 + c$ . Известно, что точка  $M(1; 4)$  принадлежит графику функции  $F(x)$ . Подставим координаты этой точки в общий вид первообразной:  $4 = 1^3 - 1^2 + c$  или  $4 = c$ . Тогда искомая первообразная  $F(x) = x^3 - x^2 + 4$ .

Ответ:  $F(x) = x^3 - x^2 + 4.$

**348)** Учтем, что координата движущейся точки  $x(t)$  является первообразной для скорости  $v(t) = t^2 + 2t - 1$ . Тогда получаем  $x(t) = \frac{t^3}{3} + 2 \cdot \frac{t^2}{2} - t + c = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - t + c$ . Для нахождения постоянной  $c$  учтем, что в начальный момент времени ( $t = 0$ ) точка находилась в начале координат:  $0 = \frac{1}{3} \cdot 0^3 + 0^2 - 0 + c$ , откуда  $c = 0$ . Тогда координата точки  $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - t$ . Ответ:  $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - t$ .

**350)** Известно, что ускорение точки  $a(t) = 12t^2 + 4$ . Сначала найдем скорость точки  $v(t)$ , учитывая, что скорость — первообразная для ускорения. Получаем  $v(t) = 12 \cdot \frac{t^3}{3} + 4t + c_1 = 4t^3 + 4t + c_1$ . Для определения постоянной  $c_1$  учтем, что в момент  $t = 1$  с скорость точки  $v = 10$  м/с. Имеем:  $10 = 4 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1 + c_1$  или  $10 = 4 + 4 + c_1$ , откуда  $c_1 = 2$ . Тогда скорость точки  $v(t) = 4t^3 + 4t + 2$ .

Теперь найдем закон движения (координату) точки, учитывая, что координата — первообразная для скорости. Получаем  $x(t) = 4 \cdot \frac{t^4}{4} + 4 \cdot \frac{t^2}{2} + 2t + c_2 = t^4 + 2t^2 + 2t + c_2$ . Для определения постоянной  $c_2$  учтем, что в момент  $t = 1$  с координата точки  $x = 12$  м. Имеем  $12 = 1^4 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + c_2$  или  $12 = 1 + 2 + 2 + c_2$ , откуда  $c_2 = 7$ . Тогда координата точки  $x(t) = t^4 + 2t^2 + 2t + 7$ .

Ответ:  $x(t) = t^4 + 2t^2 + 2t + 7$ .

**351a)** По второму закону Ньютона ускорение тела  $a = \frac{F}{m}$ , где  $F$  — сила, приложенная к телу массой  $m$ . Сначала найдем ускорение  $a(t) = \frac{6 - 9t}{3} = 2 - 3t$ . Определим скорость тела (учтем, что скорость — первообразная для ускорения)  $v(t) = 2t - 3 \cdot \frac{t^2}{2} + c_1$ . Для определения  $c_1$  учтем, что в момент времени  $t_0 = 1$  скорость точки  $v_0 = 4$ . Имеем:  $4 = 2 \cdot 1 - \frac{3}{2} \cdot 1^2 + c_1$  или  $4 = 2 - \frac{3}{2} + c_1$ , откуда  $c_1 = 3,5$ . Тогда скорость тела  $v(t) = 2t - \frac{3}{2}t^2 + 3,5$ .

Теперь найдем координату точки (координата — первообразная для скорости)  $x(t) = 2 \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{7}{2}t + c_2 = t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{7}{2}t + c_2$ . Для определения постоянной  $c_2$  учтем, что в момент времени  $t_0 = 1$  координата  $x_0 = -5$ . Имеем:  $-5 = 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^3 + \frac{7}{2} \cdot 1 + c_2$  или  $-5 = 1 -$

$-\frac{1}{2} + \frac{7}{2} + c_2$ , откуда  $c_2 = -9$ . Тогда координата точки  $x(t) = t^2 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{7}{2}t - 9$ . Ответ:  $x(t) = t^2 - \frac{1}{2}t^3 + t - 9$ .

**352а)** Найдем общий вид первообразных  $F(x)$  для функции  $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$ . Получаем  $F(x) = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x + c = x^3 - x^2 + 4x + c$ .

Функция  $F_1(x)$  проходит через точку  $M(-1; 1)$ . Подставим координаты этой точки в общий вид первообразной:  $1 = (-1)^3 - (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + c$  или  $1 = -1 - 1 - 4 + c$ , откуда  $c = 7$ . Тогда функция  $F_1(x)$  имеет вид:  $F_1(x) = x^3 - x^2 + 4x + 7$ .

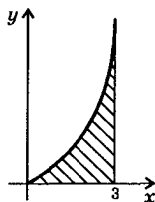
Функция  $F_2(x)$  проходит через точку  $N(0; 3)$ . Подставим координаты этой точки в общий вид первообразной:  $3 = 0^3 - 0^2 + 4 \cdot 0 + c$ , откуда  $c = 3$ . Тогда функция  $F_2(x) = x^3 - x^2 + 4x + 3$ .

Найдем разность  $F_1 - F_2 = (x^3 - x^2 + 4x + 7) - (x^3 - x^2 + 4x + 3) = 4$ . Так как эта разность положительна, то график функции  $F_1(x)$  расположен выше графика функции  $F_2(x)$ . Ответ: 4; первой.

## § 8. Интеграл

**353а)** Изобразим фигуру, ограниченную линиями  $y = x^2$ ,  $y = 0$  и  $x = 3$ . Для вычисления площади этой фигуры найдем первообразную для функции  $y = x^2$ . Получаем  $F(x) = \frac{x^3}{3}$ . Тогда площадь фигуры  $S = F(3) - F(0) = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9 - 0 = 9$ .

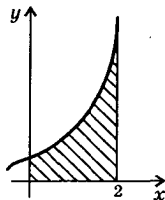
Ответ: 9.



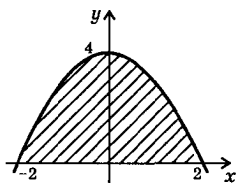
**353в)** Изобразим фигуру, ограниченную линиями  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  и  $x = \pi$ . Для вычисления площади этой фигуры найдем первообразную для функции  $y = \sin x$ . Получаем  $F(x) = -\cos x$ . Тогда площадь фигуры  $S = F(\pi) - F(0) = -\cos \pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$ . Ответ: 2.



**354а)** Изобразим фигуру, ограниченную линиями  $y = x^3 + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  и  $x = 2$ . Для вычисления площади этой фигуры найдем первообразную для функции  $y = x^3 + 1$ . Получаем  $F(x) =$



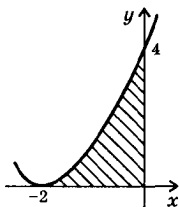
$= \frac{x^4}{4} + x$ . Тогда площадь фигуры  $S = F(2) - F(0) = \left(\frac{2^4}{4} + 2\right) - \left(\frac{0^4}{4} + 0\right) = (4 + 2) - 0 = 6$ . Ответ: 6.



**354в)** Изобразим фигуру, ограниченную линиями  $y = 4 - x^2$  и  $y = 0$ . Найдем точки пересечения параболы  $y = 4 - x^2$  с осью абсцисс. Положим  $y = 0$  и получим уравнение  $0 = 4 - x^2$ , откуда  $x = \pm 2$ . Для вычисления площади этой фигуры найдем первообразную для функции  $y = 4 - x^2$ .

Получаем  $F(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$ . Тогда площадь

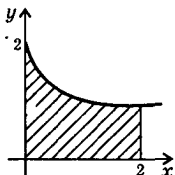
фигуры  $S = F(2) - F(-2) = \left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right) = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$ . Ответ:  $10\frac{2}{3}$ .



**355а)** Изобразим фигуру, ограниченную линиями  $y = (x + 2)^2$ ,  $y = 0$  и  $x = 0$ . Для вычисления площади этой фигуры найдем первообразную для функции  $y = (x + 2)^2$ . Получаем

$F(x) = \frac{(x + 2)^3}{3}$ . Тогда площадь фигуры  $S = F(0) - F(-2) = \frac{(0 + 2)^3}{3} - \frac{(-2 + 2)^3}{3} = \frac{8}{3} - 0 = 2\frac{2}{3}$ .

Ответ:  $2\frac{2}{3}$ .



**355б)** Изобразим фигуру, ограниченную ли-

ниями  $y = \frac{1}{(x + 1)^2} + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  и  $x = 2$ . Для вычисления площади этой фигуры найдем пер-

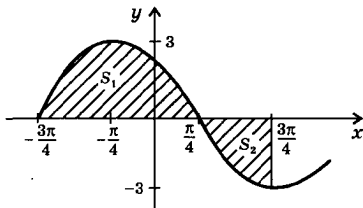
вообразную для функции  $y = \frac{1}{(x + 1)^2} + 1 =$

$= (x + 1)^{-2} + 1$ . Получаем  $F(x) = \frac{(x + 1)^{-1}}{-1} + x = -\frac{1}{x + 1} + x$ . Тогда

площадь фигуры  $S = F(2) - F(0) = \left(-\frac{1}{2 + 1} + 2\right) - \left(-\frac{1}{0 + 1} + 0\right) = 1\frac{2}{3} -$

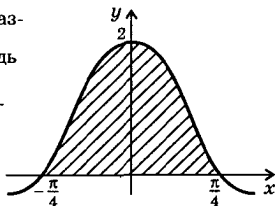
$-(-1) = 2\frac{2}{3}$ . Ответ:  $2\frac{2}{3}$ .

**356а)** Изобразим фигуру, ограниченную линиями  $y = 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ ,  $y = 0$ ,  $x = -\frac{3\pi}{4}$  и  $x = \frac{3\pi}{4}$ . На промежутке  $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$  функция  $y(x) \geq 0$ , а на промежутке  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$  функция  $y(x) \leq 0$ . Поэтому разобьем данную фигуру с площадью  $S$  на фигуры с площадями  $S_1$  и  $S_2$ , т.е.  $S = S_1 + S_2$ . Найдем первообразную для функции  $y = 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$  и получим  $F(x) = -3\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ . Тогда площадь  $S_1 = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -3\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) + 3\cos\left(-\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) = -3\cos \pi + 3\cos 0 = -3 \cdot (-1) + 3 \times$



$\times 1 = 6$ . Так как на промежутке  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$  функция  $y(x) \leq 0$ , то площадь  $S_2 = -\left(F\left(\frac{3\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\left(-3\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right)\right) = -\left(-3\cos \frac{3\pi}{2} + 3\cos \pi\right) = -(-3 \cdot 0 + 3 \cdot (-1)) = 3$ . Тогда площадь всей фигуры  $S = 6 + 3 = 9$ . **Ответ:** 9.

**356б)** Изобразим фигуру, ограниченную линиями  $y = 2\cos 2x$ ,  $y = 0$ ,  $x = -\frac{\pi}{4}$  и  $x = \frac{\pi}{4}$ . Для вычисления площади этой фигуры для функции  $y = 2\cos 2x$  найдем первообразную  $F(x) = \frac{\sin 2x}{2} = \sin x$ . Тогда площадь фигуры  $S = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin \frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$ . **Ответ:** 2.



**357а)** Для вычисления  $\int_{-1}^2 x^4 dx$  найдем первообразную для функции  $f(x) = x^4$  и получим  $F(x) = \frac{x^5}{5}$ . Используем формулу Ньютона—Лейбница. Тогда получаем:  $\int_{-1}^2 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = \frac{32}{5} + \frac{1}{5} = \frac{33}{5} = 6 \frac{3}{5}$ . Ответ:  $6 \frac{3}{5}$ .

**357б)** Для вычисления  $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$  найдем первообразную для функции  $f(x) = \cos x$  и получим  $F(x) = \sin x$ . Используем формулу Ньютона—Лейбница. Тогда получаем:  $\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$ . Ответ: 1.

**358а)** Для вычисления  $\int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}$  найдем первообразную для функции  $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2} = (2x+1)^{-2}$  и получим  $F(x) = \frac{(2x+1)^{-1}}{-1} : 2 = -\frac{1}{2(2x+1)}$ . Используем формулу Ньютона—Лейбница. Тогда получаем:  $\int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{2(2x+1)} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2(2 \cdot 2 + 1)} + \frac{1}{2(2 \cdot 1 + 1)} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{-3+5}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ . Ответ:  $\frac{1}{15}$ .

**358б)** Для вычисления  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2x dx$  найдем первообразную для функции  $f(x) = \sin 2x$  и получим  $F(x) = \frac{-\cos 2x}{2} = -\frac{1}{2} \cos 2x$ . Используем формулу Ньютона—Лейбница. Тогда получаем:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{1}{2} \cos \left( 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \cos \left( 2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{2} \cos \pi + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

Ответ:  $\frac{1}{2}$ .

**359б)** Для доказательства данного равенства надо вычислить два интеграла. Вычислим:

$$\int_0^{\pi/3} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/3} = -\cos \frac{\pi}{3} + \cos 0 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \quad \text{и}$$

$$\int_{1/16}^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_{1/16}^{1/4} = 2\sqrt{\frac{1}{4}} - 2\sqrt{\frac{1}{16}} = 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Видно, что  $\int_0^{\pi/3} \sin x \, dx = \int_{1/16}^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ . Ответ: доказано.

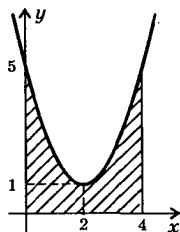
**359г)** Для доказательства данного равенства надо вычислить два интеграла. Получаем:  $\int_0^1 (2x+1) \, dx = (x^2 + x) \Big|_0^1 = (1^2 + 1) - (0^2 + 0) = 2$

и  $\int_0^2 (x^3 - 1) \, dx = \left(\frac{x^4}{4} - x\right) \Big|_0^2 = \left(\frac{2^4}{4} - 2\right) - \left(\frac{0^4}{4} - 0\right) = 4 - 2 - 0 = 2$ . Вид-

но, что  $\int_0^1 (2x+1) \, dx = \int_0^2 (x^3 - 1) \, dx$ . Ответ: доказано.

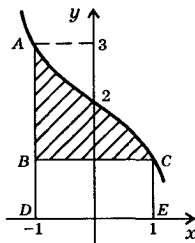
**360в)** Изобразим фигуру, ограниченную линиями  $y = x^2 - 4x + 5$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  и  $x = 4$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{площадь этой фигуры } S &= \int_0^4 (x^2 - 4x + 5) \, dx = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right) \Big|_0^4 = \left(\frac{4^3}{3} - 2 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4\right) - \\ &- \left(\frac{0^3}{3} - 2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0\right) = \left(\frac{64}{3} - 32 + 20\right) - 0 = \\ &= \frac{64}{3} - 12 = 21\frac{1}{3} - 12 = 9\frac{1}{3}. \quad \text{Ответ: } 9\frac{1}{3}. \end{aligned}$$



**361б)** Изобразим фигуру, ограниченную линиями  $y = 2 - x^3$ ,  $y = 1$ ,  $x = -1$  и  $x = 1$ . Очевидно, что искомая площадь  $S = S_{ADEC} -$

$$\begin{aligned} - S_{BCED} &= \int_{-1}^1 (2 - x^3) \, dx - \int_{-1}^1 1 \cdot dx = \\ &= \int_{-1}^1 (2 - x^3 - 1) \, dx = \int_{-1}^1 (1 - x^3) \, dx = \end{aligned}$$



$$= \left( x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-1}^1 = \left( 1 - \frac{1^4}{4} \right) - \left( -1 - \frac{(-1)^4}{4} \right) = \frac{3}{4} - \left( -\frac{5}{4} \right) = 2. \quad \text{Ответ: 2.}$$

**362б)** Подынтегральную функцию  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$  запишем в виде

$f(x) = (2x+5)^{-\frac{1}{2}}$ . Теперь вычислим данный интеграл

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x+5}} = \int_{-2}^2 (2x+5)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{(2x+5)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot 2} \Big|_{-2}^2 = \sqrt{2x+5} \Big|_{-2}^2 = \sqrt{2 \cdot 2 + 5} - \sqrt{2 \cdot (-2) + 5} = \sqrt{9} - \sqrt{1} = 3 - 1 = 2.$$

Ответ: 2.

**362в)** Вычислим интеграл

$$\int_0^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{9}} = \operatorname{tg} \frac{x}{9} : \left( \frac{1}{9} \right) \Big|_0^{3\pi} = 9 \operatorname{tg} \frac{x}{9} \Big|_0^{3\pi} = 9 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{9} - 9 \operatorname{tg} \frac{0}{9} = 9 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - 9 \operatorname{tg} 0 = 9 \cdot \sqrt{3} - 9 \cdot 0 = 9\sqrt{3}.$$

Ответ:  $9\sqrt{3}$ .

**363а)** Используя основное тригонометрическое тождество и формулу для синуса двойного аргумента, подынтегральную функцию запишем в виде

$$f(x) = \left( \sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{4} \right)^2 = \sin^2 \frac{x}{4} + 2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} + \cos^2 \frac{x}{4} = \left( \sin^2 \frac{x}{4} + \cos^2 \frac{x}{4} \right) + \left( 2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \right) = 1 + \sin \frac{x}{2}. \quad \text{Вычислим данный интеграл}$$

$$\int_0^{2\pi/3} \left( \sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{4} \right)^2 dx = \int_0^{2\pi/3} \left( 1 + \sin \frac{x}{2} \right) dx = \left( x - 2 \cos \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{2\pi/3} = \left( \frac{2\pi}{3} - 2 \cos \frac{\pi}{3} \right) - (0 - 2 \cos 0) = \left( \frac{2\pi}{3} - 2 \cdot \frac{1}{2} \right) + 2 \cdot 1 = \frac{2\pi}{3} + 1.$$

Ответ:  $\frac{2\pi}{3} + 1$ .

**363б)** Вычислим интеграл

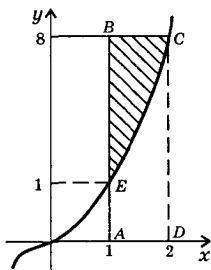
$$\int_0^2 (1+2x)^3 dx = \frac{(1+2x)^4}{4 \cdot 2} \Big|_0^2 = \frac{(1+2x)^4}{8} \Big|_0^2 = \frac{(1+2 \cdot 2)^4}{8} - \frac{(1+2 \cdot 0)^4}{8} = \frac{5^4}{8} - \frac{1^4}{8} = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = \frac{624}{8} = 78.$$

Ответ: 78.

**364а)** Изобразим фигуру, ограниченную линиями  $y = x^3$ ,  $y = 8$  и  $x = 1$ . Очевидно, что площадь данной фигуры

$$\begin{aligned} S &= S_{ABCD} - S_{AECD} = 1 \cdot 8 - \int_1^2 x^3 dx = \\ &= 8 - \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = 8 - \left( \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right) = 8 - \left( 4 - \frac{1}{4} \right) = \\ &= 4 + \frac{1}{4} = 4 \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

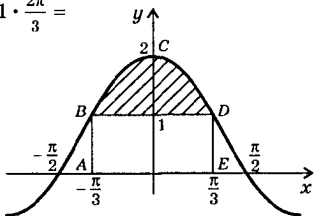
Ответ:  $4 \frac{1}{4}$ .



**364б)** Изобразим фигуру, ограниченную линиями  $y = 2\cos x$ ,  $y = 1$ ,  $x = -\frac{\pi}{3}$  и  $x = \frac{\pi}{3}$ . Очевидно, что площадь этой фигуры

$$\begin{aligned} S &= S_{ABCDE} - S_{ABDE} = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 2\cos x dx - 1 \cdot \frac{2\pi}{3} = \\ &= 2\sin x \Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} - \frac{2\pi}{3} = 2\sin \frac{\pi}{3} - \\ &- 2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{2\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \\ &- 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

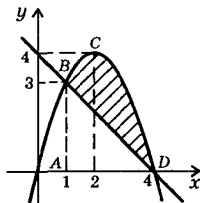
Ответ:  $2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$ .

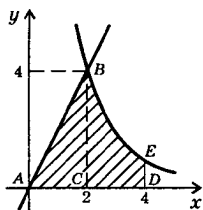


**365а)** Изобразим фигуру, ограниченную линиями  $y = 4x - x^2$  и  $y = 4 - x$ . Найдём абсциссы точек пересечения этих линий:  $4x - x^2 = 4 - x$  или  $0 = x^2 - 5x + 4$ , откуда  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 4$ . Тогда площадь данной фигуры  $S =$

$$\begin{aligned} S &= S_{ABCD} - S_{ABD} = \int_1^4 (4x - x^2) dx - \int_1^4 (4 - x) dx = \\ &= \int_1^4 [(4x - x^2) - (4 - x)] dx = \int_1^4 (5x - x^2 - 4) dx = \left( 5 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_1^4 = \\ &= \left( 5 \cdot \frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{3} - 4 \cdot 4 \right) - \left( 5 \cdot \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} - 4 \cdot 1 \right) = \left( 40 - \frac{64}{3} - 16 \right) - \\ &- \left( \frac{5}{2} - \frac{1}{3} - 4 \right) = \frac{8}{3} - \left( -\frac{11}{6} \right) = \frac{8}{3} + \frac{11}{6} = \frac{27}{6} = 4,5. \end{aligned}$$

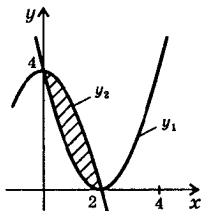
Ответ: 4,5.





**365б)** Изобразим фигуру, ограниченную линиями  $y = \frac{16}{x^2}$ ,  $y = 2x$  и  $x = 4$ . Найдем абсциссу точки пересечения линий  $y = \frac{16}{x^2}$  и  $y = 2x$ . Получаем уравнение:  $\frac{16}{x^2} = 2x$  или  $8 = x^3$ , откуда  $x = 2$ . Разобьем данную фигуру на две:  $ABC$  и  $CBED$ . Тогда искомая площадь

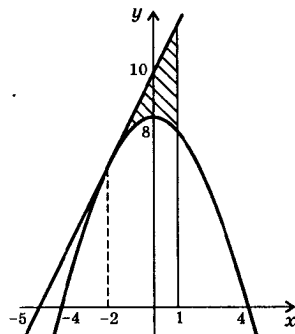
$$S = S_{ABC} + S_{CBED} = \frac{1}{2} AC \cdot BC + \int_2^4 \frac{16}{x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 - \frac{16}{x} \Big|_2^4 = 4 - \left( \frac{16}{4} - \frac{16}{2} \right) = 4 - (4 - 8) = 4 - (-4) = 8. \quad \text{Ответ: } 8.$$



**366а)** Изобразим фигуру, ограниченную линиями  $y_1 = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$  и  $y_2 = 4 - x^2$ . Аналогично задаче 365,а можно показать, что площадь этой фигуры

$$S = \int_0^2 (y_2 - y_1) dx = \int_0^2 (4 - x^2 - x^2 + 4x - 4) dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx = \left( -\frac{2x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^2 = \left( -\frac{2 \cdot 2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 \right) - \left( -\frac{2 \cdot 0^3}{3} + 2 \cdot 0^2 \right) = \left( -\frac{16}{3} + 8 \right) - 0 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Ответ:  $2\frac{2}{3}$ .



**368)** Изобразим графики функции  $f(x) = 8 - 0,5x^2$  и касательной к этой параболе в точке с абсциссой  $x_0 = -2$ . Прежде всего напомним уравнение касательной в точке с абсциссой  $x_0$ :  $y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$ . Учтем, что  $f'(x_0) = -(-2) = 2$  и  $f(x_0) = 8 - 0,5 \cdot (-2)^2 = 8 - 2 = 6$ . Тогда уравнение касательной  $y = 2(x + 2) + 6$  или  $y = 2x + 10$ . Площадь данной фигуры (см. задачу 365,а)

$$S = \int_{-2}^4 (y - f(x)) dx = \int_{-2}^4 (2x + 10 - 8 + 0,5x^2) dx = \int_{-2}^4 (2x + 2 + 0,5x^2) dx =$$

$$= \left( x^2 + 2x + \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{-2}^1 = \left( 1^2 + 2 \cdot 1 + \frac{1^3}{6} \right) - \left( (-2)^2 + 2 \cdot (-2) + \frac{(-2)^3}{6} \right) = 3 \frac{1}{6} - \left( -\frac{4}{3} \right) = 3 \frac{1}{6} + 1 \frac{1}{3} = 4 \frac{1}{2} = 4,5. \quad \text{Ответ: } 4,5.$$

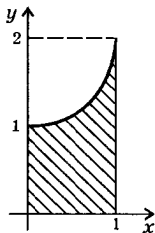
**370а)** Найдем объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = x^2 + 1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$  и  $y = 0$ . Известно, что объем тела вращения

вычисляется по формуле  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ . Тогда

$$\text{получаем } V = \pi \int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx =$$

$$= \pi \left( \frac{x^5}{5} + \frac{2}{3} x^3 + x \right) \Big|_0^1 = \pi \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) - \pi \left( \frac{0}{5} + \frac{2}{3} \cdot 0 + 0 \right) = \pi \frac{3 + 10 + 15}{15} =$$

$$= \pi \frac{28}{15} = \frac{28}{15} \pi. \quad \text{Ответ: } \frac{28}{15} \pi.$$



**371а)** Вычислим объем тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной линиями  $y_1 = x^2$  и  $y_2 = x$ . При вращении

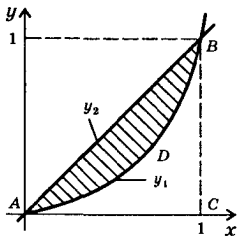
фигуры  $ABC$  ее объем  $V_2 = \pi \int_0^1 y_2^2 dx$ . При вращении фигуры  $ADBC$  ее объем  $V_1 =$

$= \pi \int_0^1 y_1^2 dx$ . Тогда объем данной фигуры

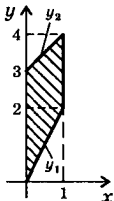
$$V = V_2 - V_1 = \pi \int_0^1 y_2^2 dx - \pi \int_0^1 y_1^2 dx = \pi \int_0^1 (y_2^2 - y_1^2) dx = \pi \int_0^1 (x^2 - (x^2)^2) dx =$$

$$= \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \pi \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) - \pi \left( \frac{0}{3} - \frac{0}{5} \right) =$$

$$= \pi \cdot \frac{2}{15} - \pi \cdot 0 = \frac{2}{15} \pi. \quad \text{Ответ: } \frac{2}{15} \pi.$$

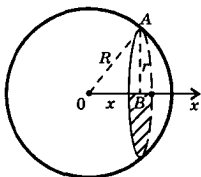


**371б)** Вычислим объем тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной линиями  $y_1 = 2x$ ,  $y_2 = x + 3$ ,  $x = 0$  и  $x = 1$ . Учитывая результаты предыдущей задачи, этот объем



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 (y_2^2 - y_1^2) dx = \pi \int_0^1 ((x+3)^2 - (2x)^2) dx = \pi \int_0^1 (x^2 + 6x + 9 - 4x^2) dx = \\
 &= \pi \int_0^1 (6x + 9 - 3x^2) dx = \pi (3x^2 + 9x - x^3) \Big|_0^1 = \pi(3+9-1) - \pi(0+0-0) = 11\pi.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $11\pi$ .



**372а)** Введем ось координат перпендикулярно сечению шара с началом в центре шара. Сечением шара является круг радиуса  $r$  и площадью  $S(x) = \pi r^2$ . Для нахождения радиуса  $r$  рассмотрим прямоугольный треугольник  $OAB$ . По теореме Пифагора  $AB^2 = OA^2 - OB^2$  или  $r^2 = R^2 - x^2$ , тогда  $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$ . Теперь найдем объем шарового сегмента, ис-

пользуя формулу  $V = \pi \int_a^b S(x) dx$ . Получаем

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{R-H}^R \pi(R^2 - x^2) dx = \pi \left( R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{R-H}^R = \pi \left( R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3} \right) - \\
 &- \pi \left( R^2(R-H) - \frac{(R-H)^3}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi R^3 - \pi \left( R^3 - R^2 H - \frac{R^3 - 3R^2 H + 3RH^2 - H^3}{3} \right) = \\
 &= \frac{2}{3} \pi R^3 - \pi \left( \frac{2}{3} R^3 - RH^2 + \frac{H^3}{3} \right) = \pi \left( RH^2 - \frac{H^3}{3} \right) = \frac{\pi H^2}{3} (3R - H).
 \end{aligned}$$

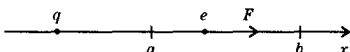
Ответ:  $\frac{\pi H^2}{3} (3R - H)$ .

**374)** По закону Гука сила  $F$ , растягивающая пружину на величину  $x$ , вычисляется по формуле  $F = kx$  (где  $k$  — коэффициент пропорциональности). Так как сила в 4 Н растягивает пружину на 8 см (или 0,08 м), то получаем уравнение  $4 = k \cdot 0,08$ , откуда  $k = 50$ . Тогда сила  $F = 50x$ . Теперь найдем работу, которая при этом со-

вершается, по формуле  $A = \int_a^b F(x) dx$ . Получаем:

$$A = \int_0^{0,08} 50x dx = 25x^2 \Big|_0^{0,08} = 25 \cdot 0,08^2 = 0,16 \text{ Дж.} \quad \text{Ответ: } 0,16 \text{ Дж.}$$

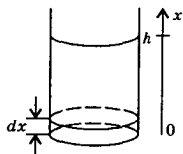
**375)** По закону Кулона на электрон действует сила  $F = -\frac{\gamma q}{x^2}$ , где  $\gamma$  — коэффициент пропорциональности,  $q$  — величина заряда,  $x$  —



расстояние между зарядом и электроном. Найдём работу силы взаимодействия зарядов

$$A = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b -\frac{\gamma q}{x^2} dx = \frac{\gamma q}{x} \Big|_a^b = \gamma q \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right). \quad \text{Ответ: } \gamma q \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right).$$

**377)** Пусть тонкий слой жидкости плотности  $\rho$  толщины  $dx$  поднимается на высоту  $x$ . Тогда объём такого цилиндрического слоя  $\pi r^2 dx$  и вес  $\rho g \pi r^2 dx$ . Работа, которая затрачивается на подъём этого слоя, равна  $dA = \rho g \pi r^2 dx \cdot x$ . Для нахождения всей работы по заполнению бака надо просуммировать по всем таким слоям (при условии, что толщина слоя  $dx \rightarrow 0$ ). Получаем:



$$A = \int_0^h \rho g \pi r^2 x dx = \rho g \pi r^2 \int_0^h x dx = \rho g \pi r^2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h^2 \rho g}{2}.$$

Ответ:  $\frac{\pi r^2 h^2 \rho g}{2}$ .

## Глава IV. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

### § 9. Обобщение понятия степени

**381а)** По определению  $\sqrt[4]{16} = 2$ , т.к.  $2^4 = 16$ .

Ответ: проверено.

**381г)** По определению  $\sqrt[5]{-243} = -3$ , т.к.  $(-3)^5 = -243$ .

Ответ: проверено.

**383в)** Используем свойства корней:  $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$ .

Ответ: -2.

**384б)** Используем свойства корней:  $\sqrt[4]{\frac{81}{625}} = \sqrt[4]{\left(\frac{3}{5}\right)^4} = \frac{3}{5}$ .

Ответ:  $\frac{3}{5}$ .

**385а)** Запишем уравнение  $x^3 + 4 = 0$  в виде  $x^3 = -4$ . Так как это уравнение нечетной (третьей степени), то оно имеет единственный корень  $x = \sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$ . Ответ:  $-\sqrt[3]{4}$ .

**3856)** Уравнение  $x^6 = 5$  имеет четную (шестую) степень. Поэтому уравнение имеет два корня  $x = \pm \sqrt[6]{5}$ . Ответ:  $\pm \sqrt[6]{5}$ .

**387в)** Из уравнения  $0,02x^6 - 1,28 = 0$  выразим  $x^6 = \frac{1,28}{0,02} = 64$ . Так как уравнение  $x^6 = 64$  четной (шестой) степени, то оно имеет два корня  $x = \pm \sqrt[6]{64} = \pm \sqrt[6]{2^6} = \pm 2$ . Ответ:  $\pm 2$ .

**388а)** Обе части уравнения  $\sqrt[3]{x} = -0,6$  возведем в третью степень:  $(\sqrt[3]{x})^3 = (-0,6)^3$  или  $x = -0,216$ . Итак, уравнение имеет единственный корень. Ответ:  $-0,216$ .

**389б)** Используем свойства степеней и определение корня. Тогда получаем:  $(2^5 \sqrt{-2})^5 = 2^5 \cdot (\sqrt[5]{-2})^5 = 2^5 \cdot (-2) = -2^6 = -64$ . Ответ:  $-64$ .

**390б)** Используем свойства корней и учтем, что  $32 = 2^5$  и  $243 = 3^5$ . Получаем:  $\sqrt[5]{32 \cdot 243} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 3^5} = \sqrt[5]{(2 \cdot 3)^5} = \sqrt[5]{6^5} = 6$ .

Ответ: 6.

**391в)** Подкоренное выражение разложим на простые множители. Учтем, что  $48 = 2^4 \cdot 3$  и  $27 = 3^3$ . Тогда получаем:  $\sqrt[4]{48 \cdot 27} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3 \cdot 3^3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4} = \sqrt[4]{(2 \cdot 3)^4} = \sqrt[4]{6^4} = 6$ . Ответ: 6.

**393б)** Учтем свойства корней. Тогда получаем:

$$\frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{\frac{128}{8}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2. \quad \text{Ответ: } 2.$$

**394а)** Обратим смешанные числа в неправильные дроби:  $39 \frac{1}{16} = \frac{625}{16} = \frac{5^4}{2^4} = \left(\frac{5}{2}\right)^4$  и  $39 \frac{19}{27} = \frac{100}{27} = \frac{10^2}{3^3}$  и учтем свойства степеней и

$$\begin{aligned} \text{корней. Тогда получаем: } & \sqrt[6]{\frac{64}{100\,000\,000}} \cdot \sqrt[4]{39 \frac{1}{16}} : \sqrt[3]{-3 \frac{19}{27}} = \\ & = \sqrt[6]{\frac{2^6}{10^8}} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{5}{2}\right)^4} : \sqrt[3]{\frac{10^2}{-3^3}} = \frac{\sqrt[6]{2^6}}{\sqrt[6]{10^8}} \cdot \frac{5}{2} : \left(-\frac{\sqrt[3]{10^2}}{\sqrt[3]{3^3}}\right) = -\frac{2}{\sqrt[3]{10^4}} \cdot \frac{5}{2} : \frac{\sqrt[3]{10^2}}{3} = \\ & = -\frac{5}{\sqrt[3]{10^4}} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{10^2}} = -\frac{15}{\sqrt[3]{10^4 \cdot 10^2}} = -\frac{15}{\sqrt[3]{10^6}} = -\frac{15}{\sqrt[3]{(10^2)^6}} = -\frac{15}{\sqrt[3]{100^3}} = \\ & = -\frac{15}{100} = -\frac{3}{20}. \quad \text{Ответ: } -\frac{3}{20}. \end{aligned}$$

**394б)** Обратим смешанные числа в неправильные дроби и используем свойства корней. Получаем:  $\sqrt[5]{1 \frac{11}{16} \cdot 4,5} - \frac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{288}} = \sqrt[5]{\frac{27}{16} \cdot \frac{9}{2}} -$

$$-\sqrt[5]{\frac{9}{288}} = \sqrt[5]{\frac{3^3 \cdot 3^2}{2^4 \cdot 2}} - \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \sqrt[5]{\frac{3^5}{2^5}} - \sqrt[5]{\frac{1}{2^5}} = \frac{\sqrt[5]{3^5}}{\sqrt[5]{2^5}} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

Ответ: 1.

**398б)** Так как подкоренные числа связаны неравенством  $0,4 < \frac{5}{12}$ , то и корни одинаковой (двенадцатой) степени связаны неравенством того же знака:  $\sqrt[12]{0,4} < \sqrt[12]{\frac{5}{12}}$ . Ответ:  $\sqrt[12]{0,4} < \sqrt[12]{\frac{5}{12}}$ .

**399а)** Используя свойства корней, первое число запишем в виде  $\frac{1}{2} \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{\frac{1}{8} \cdot 2} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ . второе число — в виде  $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ . Так как числа удовлетворяют неравенству  $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ , то и корни одинаковой (третьей) степени из этих чисел связаны неравенством того же знака, т.е.  $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} < \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$  или  $\frac{1}{2} \sqrt[3]{2} < \left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)^2$ .

Ответ:  $\frac{1}{2} \sqrt[3]{2} < \left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)^2$ .

**400б)** Данные числа представим в виде корней одинаковой (пятнадцатой) степени:  $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3 \cdot 5]{4^5} = \sqrt[15]{(2^2)^5} = \sqrt[15]{2^{10}}$  и  $\sqrt[5]{8} = \sqrt[5 \cdot 3]{8^3} = \sqrt[15]{(2^3)^3} = \sqrt[15]{2^9}$ . Подкоренные числа удовлетворяют неравенству  $2^{10} > 2^9$ . Тогда и корни одинаковой (пятнадцатой) степени из этих чисел связаны неравенством того же знака, т.е.  $\sqrt[15]{2^{10}} > \sqrt[15]{2^9}$  или  $\sqrt[3]{4} > \sqrt[5]{8}$ . Ответ:  $\sqrt[3]{4} > \sqrt[5]{8}$ .

**401в)** Числа представим в виде корней одинаковой (пятнадцатой) степени:  $\sqrt[3]{-2} = \sqrt[3 \cdot 5]{(-2)^5} = \sqrt[15]{-2^5}$  и  $\sqrt[5]{-4} = \sqrt[5 \cdot 3]{(-4)^3} = \sqrt[15]{-4^3} = \sqrt[15]{-(2^2)^3} = \sqrt[15]{-2^6}$ . Подкоренные числа удовлетворяют

неравенству  $-2^5 > -2^6$ . Тогда и корни одинаковой (пятнадцатой) степени из этих чисел связаны неравенством того же знака:  $\sqrt[15]{-2^5} > \sqrt[15]{-2^6}$  или  $\sqrt[3]{-2} > \sqrt[5]{-4}$ . Ответ:  $\sqrt[3]{-2} > \sqrt[5]{-4}$ .

**402а)** Используем свойства степеней и корней. Получаем:

$$\sqrt[6]{64a^8b^{11}} = \sqrt[6]{2^6 \cdot a^6 \cdot a^2 \cdot b^6 \cdot b^5} = \sqrt[6]{(2^6 a^6 b^6) \cdot (a^2 b^5)} = \sqrt[6]{(2ab)^6} \times \sqrt[6]{a^2 b^5} = |2ab| \sqrt[6]{a^2 b^5} = 2ab \sqrt[6]{a^2 b^5}. \text{ Учтено, что } a > 0, b > 0. \text{ Поэтому } 2ab > 0 \text{ и } |2ab| = 2ab. \text{ Ответ: } 2ab \sqrt[6]{a^2 b^5}.$$

**403б)** Так как  $a, b > 0$ , то произведение  $ab > 0$  и  $ab = |ab| = \sqrt[8]{(ab)^8}$ . Используем свойства степеней и получим:  $ab \sqrt[8]{\frac{5b^3}{a^7}} = \sqrt[8]{(ab)^8} \times \sqrt[8]{\frac{5b^3}{a^7}} = \sqrt[8]{a^8 b^8 \cdot \frac{5b^3}{a^7}} = \sqrt[8]{5ab^{11}}$ . Ответ:  $\sqrt[8]{5ab^{11}}$ .

**404а)** По определению арифметического корня  $\sqrt{a^2} = |a|$ . Тогда, если  $\sqrt{a^2} = -a$ , то должно выполняться равенство  $|a| = -a$ . По определению модуля числа такое равенство выполняется при  $a \leq 0$ . Ответ:  $a \leq 0$ .

**405а)** По определению арифметического корня  $\sqrt[3]{a^3} = a$ . Так как по условию  $\sqrt[3]{a^3} = -a$ , то должно выполняться равенство  $a = -a$  или  $2a = 0$ , откуда  $a = 0$ . Ответ:  $a = 0$ .

**405в)** По определению арифметического корня  $\sqrt[4]{a^4} = |a|$ . Такое же равенство дано и по условию задачи. Следовательно, это равенство выполняется при любых значениях  $a$ .

Ответ: при всех  $a$ .

**406а)** Избавимся от иррациональности в знаменателе дроби  $\frac{3}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ . Для этого умножим числитель и знаменатель на выражение  $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ , сопряженное знаменателю. Получаем:

$$\frac{3}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})} = \frac{3(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{3(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{7 - 5} = \frac{3}{2}(\sqrt{7} + \sqrt{5}).$$

Ответ:  $\frac{3}{2}(\sqrt{7} + \sqrt{5})$ .

**406б)** Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе дроби  $\frac{a - \sqrt{2}}{a + \sqrt{2}}$ , умножим ее числитель и знаменатель на выражение

$$a - \sqrt{2}, \text{ сопряженное знаменателю. Получим: } \frac{a - \sqrt{2}}{a + \sqrt{2}} = \frac{(a - \sqrt{2})(a - \sqrt{2})}{(a + \sqrt{2})(a - \sqrt{2})} =$$

$$= \frac{(a - \sqrt{2})^2}{a^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{(a - \sqrt{2})^2}{a^2 - 2}. \quad \text{Ответ: } \frac{(a - \sqrt{2})^2}{a^2 - 2}.$$

**407б)** Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе дроби  $\frac{x - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ , умножим ее числитель и знаменатель на выражение  $\sqrt{x}$ , сопряженное знаменателю. Получаем:  $\frac{x - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{(x - \sqrt{x})\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} =$

$$= \frac{x\sqrt{x} - x}{2x} = \frac{x(\sqrt{x} - 1)}{2x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{2}. \quad \text{Ответ: } \frac{\sqrt{x} - 1}{2}.$$

**407г)** Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе дроби  $\frac{5}{3\sqrt[5]{5}}$ , умножим ее числитель и знаменатель на величину  $\sqrt[5]{5^4} =$

$$= \sqrt[5]{625}. \text{ Получаем: } \frac{5}{3\sqrt[5]{5}} = \frac{5 \cdot \sqrt[5]{5^4}}{3 \cdot \sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[5]{5^4}} = \frac{5 \cdot \sqrt[5]{625}}{3 \cdot \sqrt[5]{5 \cdot 5^4}} = \frac{5 \sqrt[5]{625}}{3 \cdot 5} =$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt[5]{625}. \quad \text{Ответ: } \frac{1}{3} \sqrt[5]{625}.$$

**408б)** Чтобы привести числовое выражение  $\frac{6}{\sqrt[5]{27 \cdot 25}}$  к заданному виду, надо избавиться от иррациональности в знаменателе. Запишем число в виде  $\frac{6}{\sqrt[5]{3^3 \cdot 5^2}}$  и умножим числитель и знаменатель дроби на величину  $\sqrt[5]{3^2 \cdot 5^3}$ , сопряженную знаменателю. Получаем:  $\frac{6}{\sqrt[5]{27 \cdot 25}} = \frac{6}{\sqrt[5]{3^3 \cdot 5^2}} = \frac{6 \sqrt[5]{3^2 \cdot 5^3}}{\sqrt[5]{3^3 \cdot 5^2} \cdot \sqrt[5]{3^2 \cdot 5^3}} = \frac{6 \sqrt[5]{9 \cdot 125}}{\sqrt[5]{3^3 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3}} =$

$$= \frac{6 \sqrt[5]{1125}}{\sqrt[5]{3^5 \cdot 5^5}} = \frac{6 \sqrt[5]{1125}}{3 \cdot 5} = \frac{2}{5} \sqrt[5]{1125}. \quad \text{Ответ: } \frac{2}{5} \sqrt[5]{1125}.$$

**409б)** Используем свойства корней:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2} \sqrt[4]{2}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} \cdot \sqrt[4]{2}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{1}{2^4} \cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{1}{2^3}}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{1}{2^3}}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Чтобы привести это число к заданному виду, умножим числитель

и знаменатель дроби на величину  $\sqrt[4]{2^3}$ , сопряженную знаменателю.

Получаем:  $\frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{2} \cdot 2^3} = \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt[4]{8}$ . Ответ:  $\frac{1}{2} \sqrt[4]{8}$ .

**410г)** Для решения уравнения  $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} = 6$  введем новую неизвестную  $t = \sqrt[6]{x}$  (по определению арифметического корня  $t \geq 0$ ), тогда  $t^2 = (\sqrt[6]{x})^2 = \sqrt[3]{x}$ . Получаем квадратное уравнение:  $t^2 - 5t = 6$  или  $t^2 - 5t - 6 = 0$ , корни которого  $t_1 = -1$  (не подходит, т.к.  $t \geq 0$ ) и  $t_2 = 6$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем уравнение  $\sqrt[3]{x} = 6$ . Возведем в куб обе части уравнения:  $(\sqrt[3]{x})^3 = 6^3$  или  $x = 216$ . Ответ: 216.

**411а)** При решении неравенства  $x^4 < 3$  извлечем корень четвертой степени из обеих частей, учитывая, что  $\sqrt[4]{x^4} = |x|$ . Получаем:  $|x| < \sqrt[4]{3}$ . Это неравенство эквивалентно двойному линейному неравенству:  $-\sqrt[4]{3} < x < \sqrt[4]{3}$ , т.е.  $x \in (-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3})$ .

Ответ:  $(-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3})$ .

**411б)** При решении неравенства  $x^{11} \geq 7$  извлечем корень одиннадцатой степени из обеих частей:  $\sqrt[11]{x^{11}} \geq \sqrt[11]{7}$  или  $x \geq \sqrt[11]{7}$ , т.е.  $x \in [\sqrt[11]{7}; \infty)$ . Ответ:  $[\sqrt[11]{7}; \infty)$ .

**411в)** При решении неравенства  $x^{10} > 2$  извлечем корень десятой (четной) степени из обеих частей, учитывая, что  $\sqrt[10]{x^{10}} = |x|$ . Получаем:  $|x| > \sqrt[10]{2}$ . Это неравенство эквивалентно двум неравенствам:  $x < -\sqrt[10]{2}$  и  $x > \sqrt[10]{2}$ , т.е.  $x \in (-\infty; -\sqrt[10]{2}) \cup (\sqrt[10]{2}; \infty)$ .

Ответ:  $(-\infty; -\sqrt[10]{2}) \cup (\sqrt[10]{2}; \infty)$ .

**412а)** Обе части неравенства  $\sqrt[3]{x} < -7$  возведем в куб:  $x < (-7)^3$  или  $x < -343$ , т.е.  $x \in (-\infty; -343)$ . Ответ:  $(-\infty; -343)$ .

**412б)** При решении неравенства  $\sqrt[6]{x} \geq 2$  учтем, что  $x \geq 0$  (т.к. корень четной степени можно извлекать только из неотрицательных чисел). Возведем обе неотрицательные части этого неравенства в шестую степень:  $(\sqrt[6]{x})^6 \geq 2^6$  или  $x \geq 64$ . С учетом ОДЗ получаем решение неравенства  $x \in [64; \infty)$ . Ответ:  $[64; \infty)$ .

**412г)** При решении неравенства  $\sqrt[4]{x} \leq 3$  учтем, что  $x \geq 0$  (т.к. корень четной степени можно извлекать только из неотрицательных чисел). Возведем обе неотрицательные части этого неравенства в четвертую степень:  $(\sqrt[4]{x})^4 \leq 3^4$  или  $x \leq 81$ . С учетом ОДЗ получаем решение неравенства  $0 \leq x \leq 81$  или  $x \in [0; 81]$ .

Ответ:  $[0; 81]$ .

**413а)** Учитывая определение арифметического корня, получим:  $\sqrt[6]{a^6} = |a| = -a$  (т.к.  $a \leq 0$  и  $|a| = -a$ ). Ответ:  $-a$ .

**414б)** Учтем определение арифметического корня и получим:  $\sqrt[4]{a^4} + 2\sqrt[7]{a^7} = |a| + 2a = a + 2a = 3a$  (т.к.  $a \geq 0$  и  $|a| = a$ ).

Ответ:  $3a$ .

**414г)** Учитывая определение арифметического корня, имеем:  $\sqrt[3]{a^3} + 3\sqrt[8]{a^8} = a + 3|a| = a + 3 \cdot (-a) = a - 3a = -2a$  (т.к.  $a \leq 0$  и  $|a| = -a$ ). Ответ:  $-2a$ .

**415а)** Используем свойства корней и формулу для разности квадратов чисел:  $\sqrt[3]{10 + \sqrt{73}} \cdot \sqrt[3]{10 - \sqrt{73}} = \sqrt[3]{(10 + \sqrt{73})(10 - \sqrt{73})} = \sqrt[3]{10^2 - (\sqrt{73})^2} = \sqrt[3]{100 - 73} = \sqrt[3]{27} = 3$ . Ответ: 3.

**415б)** Умножим числитель и знаменатель дроби на  $\sqrt[3]{4 + \sqrt{17}}$ , используем свойства корней и формулу для разности квадратов чисел. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{(4 + \sqrt{17})^2}}{\sqrt[3]{4 - \sqrt{17}}} + \sqrt{17} &= \frac{\sqrt[3]{(4 + \sqrt{17})^2} \cdot \sqrt[3]{4 + \sqrt{17}}}{\sqrt[3]{4 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{4 + \sqrt{17}}} + \sqrt{17} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{(4 + \sqrt{17})^2(4 + \sqrt{17})}}{\sqrt[3]{(4 - \sqrt{17})(4 + \sqrt{17})}} + \sqrt{17} = \frac{\sqrt[3]{(4 + \sqrt{17})^3}}{\sqrt[3]{4^2 - (\sqrt{17})^2}} + \sqrt{17} = \frac{4 + \sqrt{17}}{\sqrt[3]{16 - 17}} + \\ &+ \sqrt{17} = \frac{4 + \sqrt{17}}{-1} + \sqrt{17} = -4 - \sqrt{17} + \sqrt{17} = -4. \end{aligned}$$

Ответ:  $-4$ .

**416а)** Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе дроби  $\frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}}$ , умножим числитель и знаменатель дроби на неполный квадрат суммы  $\sqrt[3]{2}$  и  $\sqrt[3]{3}$ , величину, сопряженную знаме-

нателью. Получаем: 
$$\frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}} = \frac{1 \cdot (\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^2})}{(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^2})} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}{(\sqrt[3]{2})^3 - (\sqrt[3]{3})^3} = \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}{2 - 3} = \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}{-1} = -\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{9}.$$

Ответ:  $-\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{9}.$

**416г)** Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе дроби  $\frac{3a}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$ , умножим числитель и знаменатель на величину  $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ , сопряженную знаменателю. Получаем:

$$\frac{3a}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{3a(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})}{(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})} = \frac{3a(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})}{(\sqrt[3]{a})^3 + (\sqrt[3]{b})^3} = \frac{3a(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})}{a + b}.$$

Ответ:  $\frac{3a(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})}{a + b}.$

**417в)** Обе части уравнения  $\sqrt{61 - x^2} = 5$  возведем в квадрат:  $61 - x^2 = 25$ , откуда  $61 - 25 = x^2$  или  $36 = x^2$ . Корни этого уравнения  $x = \pm 6$ . Ответ:  $\pm 6$ .

**418б)** Уравнение  $x + \sqrt{2x + 3} = 6$  запишем в виде  $\sqrt{2x + 3} = 6 - x$ . По определению арифметического корня правая часть уравнения должна быть неотрицательной, т.е.  $6 - x \geq 0$ . Обе неотрицательные части уравнения возведем в квадрат:  $2x + 3 = (6 - x)^2$ . При этом, очевидно,  $2x + 3 \geq 0$ . Таким образом, данное уравнение эквивалентно

системе 
$$\begin{cases} 6 - x \geq 0 \\ 2x + 3 = (6 - x)^2 \end{cases}.$$
 Решим уравнение этой системы:

$2x + 3 = 36 - 12x + x^2$  или  $0 = x^2 - 14x + 33$ . Корни этого квадратного уравнения  $x_1 = 3$  и  $x_2 = 11$ . Неравенству  $6 - x \geq 0$  удовлетворяет только корень  $x = 3$ . Ответ: 3.

**419а)** Обе неотрицательные части уравнения  $\sqrt{2x + 1} =$   
 $= \sqrt{x^2 - 2x + 4}$  возведем в квадрат:  $2x + 1 = x^2 - 2x + 4$ . Учтем, что подкоренное выражение должно быть неотрицательным, т.е.  $2x + 1 \geq 0$  (тогда в силу равенства  $2x + 1 = x^2 - 2x + 4$  выражение  $x^2 - 2x + 4 \geq 0$ ). Таким образом, данное уравнение эквивалентно

системе  $\begin{cases} 2x+1 = x^2 - 2x + 4 \\ 2x+1 \geq 0 \end{cases}$ . Решим уравнение этой системы:  
 $0 = x^2 - 2x + 4 - 2x - 1$  или  $0 = x^2 - 4x + 3$ . Корни квадратного уравнения  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 3$  удовлетворяют неравенству  $2x + 1 \geq 0$ .

Ответ: 1; 3.

**420г)** В уравнение  $x + 1 = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x}$  входит корень нечетной (третьей) степени. Так как корень нечетной степени можно извлечь из любых чисел, то никаких ограничений на  $x$  не возникает. Возведем в куб обе части данного уравнения:  $(x + 1)^3 = x^3 + 2x^2 + x$  или  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 2x^2 + x$  или  $x^2 + 2x + 1 = 0$  или  $(x + 1)^2 = 0$ , откуда  $x + 1 = 0$  и  $x = -1$ . Ответ: -1.

**421а)** Для решения системы уравнений  $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{y} = 1 \\ 3\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 10 \end{cases}$  введем новые неизвестные  $z = \sqrt[3]{x}$  и  $t = \sqrt[3]{y}$ . Получаем систему линейных уравнений  $\begin{cases} z + 2t = 1 \\ 3z - t = 10 \end{cases}$ . Из первого уравнения выразим  $z = 1 - 2t$  и подставим во второе уравнение:  $3(1 - 2t) - t = 10$  или  $3 - 6t - t = 10$  или  $-7t = 7$ , откуда  $t = -1$ . Тогда  $z = 1 - 2t = 1 - 2(-1) = 3$ . Вернемся к старым неизвестным  $x$  и  $y$ . Получаем:  $\begin{cases} \sqrt[3]{x} = 3 \\ \sqrt[3]{y} = -1 \end{cases}$ . Возведем в куб каждое уравнение системы и найдем  $x = 3^3 = 27$  и  $y = (-1)^3 = -1$ . Итак, система имеет единственное решение  $(27; -1)$ . Ответ:  $(27; -1)$ .

**421г)** Для решения системы уравнений  $\begin{cases} \sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 5\sqrt{5} \\ 5\sqrt{y} - 2\sqrt{x} = \sqrt{5} \end{cases}$  введем новые неизвестные  $z = \sqrt{x}$ ,  $t = \sqrt{y}$  и обозначим  $a = \sqrt{5}$ . Получаем систему линейных уравнений  $\begin{cases} z + 3t = 5a \\ 5t - 2z = a \end{cases}$ . Из первого уравнения выразим  $z = 5a - 3t$  и подставим во второе уравнение:  $5t - 2(5a - 3t) = a$  или  $5t - 10a + 6t = a$  или  $11t = 11a$ , откуда  $t = a = \sqrt{5}$ . Тогда  $z = 5a - 3t = 5a - 3a = 2a = 2\sqrt{5}$ . Вернемся к старым неизвестным  $x$  и  $y$ . Получаем:  $\begin{cases} \sqrt{x} = 2\sqrt{5} \\ \sqrt{y} = \sqrt{5} \end{cases}$ . Возведем в квадрат каждое уравнение системы и найдем  $x = (2\sqrt{5})^2 = 20$  и  $y = (\sqrt{5})^2 = 5$ . Ответ:  $(20; 5)$ .

**422в)** Найдем ОДЗ уравнения  $\frac{x+6}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{3x+2}$ . ОДЗ определяется условиями:  $x-2 > 0$  и  $3x+2 \geq 0$ . Решение этих неравенств  $x \in (2; \infty)$ . Умножим обе части данного уравнения на  $\sqrt{x-2}$ :  $x+6 = \sqrt{3x+2} \cdot \sqrt{x-2}$ . При  $x \in (2; \infty)$  левая часть уравнения  $x+6 > 0$ . Возведем обе неотрицательные части уравнения в квадрат:  $(x+6)^2 = (3x+2)(x-2)$  или  $x^2 + 12x + 36 = 3x^2 - 6x + 2x - 4$  или  $0 = 2x^2 - 16x - 40$  или  $0 = x^2 - 8x - 20$ . Корни этого квадратного уравнения  $x_1 = -2$  и  $x_2 = 10$ . В ОДЗ входит только решение  $x = 10$ .

Ответ: 10.

**423г)** Обе части уравнения  $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 5}} = 1$  возведем в квадрат  $x - \sqrt{x^2 - 5} = 1$ . Запишем уравнение в виде  $x + 1 = \sqrt{x^2 - 5}$ . По определению арифметического корня величина  $x + 1 \geq 0$ . Возведем обе неотрицательные части уравнения в квадрат:  $(x+1)^2 = x^2 - 5$  (тогда выражение  $x^2 - 5 \geq 0$ ). Таким образом, уравнение

эквивалентно системе  $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ (x+1)^2 = x^2 - 5 \end{cases}$ . Решим уравнение этой системы:  $x^2 + 2x + 1 = x^2 - 5$ , откуда  $2x = -6$  и  $x = -3$ . Но этот корень не удовлетворяет неравенству  $x + 1 \geq 0$ . Следовательно, уравнение решений не имеет. Ответ: решений нет.

**424в)** ОДЗ уравнения  $2 + \sqrt{10 - x} = \sqrt{22 - x}$  определяется неравенствами  $\begin{cases} 10 - x \geq 0 \\ 22 - x \geq 0 \end{cases}$ , откуда  $x \leq 10$ . Обе неотрицательные части уравнения возведем в квадрат:  $4 + 4\sqrt{10 - x} + 10 - x = 22 - x$  или  $4\sqrt{10 - x} = 8$  или  $\sqrt{10 - x} = 2$ . Вновь возведем в квадрат обе неотрицательные части уравнения:  $10 - x = 4$ , откуда  $x = 6$ . Этот корень удовлетворяет ОДЗ. Ответ: 6.

**425г)** Для решения уравнения  $3^{10\sqrt{x^2-3}} + 5^{\sqrt{x^2-3}} = 4$  введем новую неизвестную  $t = 10\sqrt{x^2-3}$ , тогда  $t^2 = \left(10\sqrt{x^2-3}\right)^2 = 5^{\sqrt{x^2-3}}$ . Получаем квадратное уравнение:  $3t + t^2 = 4$  или  $t^2 + 3t - 4 = 0$ . Корни этого уравнения  $t_1 = 1$  и  $t_2 = -4$  (не подходит, т.к.  $t$  — корень четной степени и  $t \geq 0$ ). Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Получаем уравнение  $10\sqrt{x^2-3} = 1$ . Возведем обе части уравнения в десятую степень:  $x^2 - 3 = 1$  или  $x^2 = 4$ , откуда  $x = \pm 2$ .

Ответ:  $\pm 2$ .

**426а)** Для решения системы уравнений 
$$\begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x}\sqrt{y} = 3 \end{cases}$$
 введем

новые неизвестные  $\sqrt{x} = z$  и  $\sqrt{y} = t$ . Очевидно, что  $z, t \geq 0$ . Тогда

система уравнений имеет вид 
$$\begin{cases} 2z - t = 5 \\ zt = 3 \end{cases}$$
. Из первого уравнения

выразим  $t = 2z - 5$  и подставим во второе уравнение:  $z(2z - 5) = 3$  или  $2z^2 - 5z - 3 = 0$ . Корни этого уравнения  $z_1 = 3$  и  $z_2 = -\frac{1}{2}$  (не подходит, т.к.  $z \geq 0$ ). Тогда  $t = 2z - 5 = 2 \cdot 3 - 5 = 1$ . Вернемся к

старым неизвестным  $x$  и  $y$ . Получаем систему 
$$\begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{y} = 1 \end{cases}$$
. Возведем каждое уравнение в квадрат и найдем  $x = 9$  и  $y = 1$ .

Ответ: (9; 1).

**526б)** Для решения системы 
$$\begin{cases} \sqrt{6+x} - 3\sqrt{3y+4} = -10 \\ 4\sqrt{3y+4} - 5\sqrt{6+x} = 6 \end{cases}$$
 введем

новые неизвестные  $\sqrt{6+x} = z \geq 0$  и  $\sqrt{3y+4} = t \geq 0$ . Получаем систему

линейных уравнений 
$$\begin{cases} z - 3t = -10 \\ 4t - 5z = 6 \end{cases}$$
. Из первого уравнения

выразим  $z = 3t - 10$  и подставим во второе уравнение:  $4t - 5(3t - 10) = 6$  или  $4t - 15t + 50 = 6$  или  $-11t = -44$ , откуда  $t = 4$ . Теперь найдем  $z = 3t - 10 = 3 \cdot 4 - 10 = 2$ . Вернемся к старым неизвестным

$x$  и  $y$ . Получаем систему уравнений 
$$\begin{cases} \sqrt{6+x} = 2 \\ \sqrt{3y+4} = 4 \end{cases}$$
 или 
$$\begin{cases} 6+x = 4 \\ 3y+4 = 16 \end{cases}$$
.

откуда  $x = -2$  и  $y = 4$ . Ответ: (-2; 4).

**427б)** Для решения системы уравнений 
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5 \\ xy = 216 \end{cases}$$
 введем

новые неизвестные  $z = \sqrt[3]{x}$  и  $t = \sqrt[3]{y}$ , тогда  $z^3 = x$  и  $t^3 = y$ . Тогда по-

лучаем систему 
$$\begin{cases} z + t = 5 \\ z^3 t^3 = 216 \end{cases}$$
. Из обеих частей второго уравнения

извлечем кубический корень. Имеем систему уравнений 
$$\begin{cases} z + t = 5 \\ zt = 6 \end{cases}$$
.

Из первого уравнения выразим  $z = 5 - t$  и подставим во второе:  $(5 - t)t = 6$  или  $0 = t^2 - 5t + 6$ . Корни этого квадратного уравнения  $t_1 = 2$  (тогда  $z_1 = 5 - t_1 = 3$ ) и  $t_2 = 3$  (тогда  $z_2 = 5 - t_2 = 2$ ). Вернемся к старым неизвестным  $x$  и  $y$ . Получаем две системы уравнений.

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 3 \\ \sqrt[3]{y} = 2 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x = 3^3 = 27 \\ y = 2^3 = 8 \end{cases}.$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 2 \\ \sqrt[3]{y} = 3 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x = 2^3 = 8 \\ y = 3^3 = 27 \end{cases}.$$

Ответ: (27; 8), (8; 27).

**428а)** Показатель степени представим в виде неправильной дроби и используем определение степени с рациональным показателем. Получаем:  $3^{1,2} = 3^{1\frac{2}{10}} = 3^{\frac{12}{10}} = 3^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{3^6}$ . Ответ:  $\sqrt[5]{3^6}$ .

**429в)** Используем определение степени с рациональным показателем. Получаем:  $\sqrt[13]{b^{-7}} = b^{-\frac{7}{13}}$ . Ответ:  $b^{-\frac{7}{13}}$ .

$$\begin{aligned} \text{430г)} \text{ Используем свойства степеней и получим: } \left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}} = \\ = \left[\frac{(3^3)^3}{(5^3)^6}\right]^{\frac{2}{9}} = \left(\frac{3^9}{5^{18}}\right)^{\frac{2}{9}} = \frac{(3^9)^{\frac{2}{9}}}{(5^{18})^{\frac{2}{9}}} = \frac{3^2}{5^4} = \frac{9}{625}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{9}{625}$ .

**431б)** Запишем корни в виде степеней с рациональным показателем. Основания степеней разложим на простые множители.

$$\begin{aligned} \text{Получаем: } \sqrt[3]{100} \cdot (\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{3}} &= (2^2 \cdot 5^2)^{\frac{1}{3}} \cdot (2^1)^{\frac{8}{3}} \cdot \frac{1}{5^{\frac{5}{3}}} = \\ &= \frac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{8}{3}}}{5^{\frac{5}{3}}} = \left(2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{8}{3}}\right) \cdot \left(\frac{5^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{5}{3}}}\right) = \frac{2^2}{5^1} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{4}{5}$ .

**432а)** Используем свойства степеней и вынесем общий множитель  $a^{\frac{1}{3}}$  за скобки. Получаем:  $(ax)^{\frac{1}{3}} + (ay)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} =$   
 $= a^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)$ . Ответ:  $a^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)$ .

**433г)** Сгруппируем члены суммы и вынесем общие множители за скобки. Имеем:  $a + b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = \left(a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right) + \left(b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}\right) =$   
 $= a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) + \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) = \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)$ .

Ответ:  $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)$ .

**434а)** Разложим числитель дроби, используя формулу для разности квадратов. После этого сократим дробь. Получаем:

$$\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}.$$

Ответ:  $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$ .

**434г)** Разложим числитель дроби, используя формулу для суммы кубов чисел. После этого сократим дробь. Получаем:

$$\frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}.$$

Ответ:  $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$ .

**435а)** Разложим числители и знаменатели дробей на множители.

ли. Имеем: 
$$\frac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2}{x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}. \quad \text{Ответ: } \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}.$$

**435в)** В скобках приведем дроби к общему знаменателю и сложим их. Разложим числитель последней дроби на множители, используя формулу для разности кубов чисел, и сократим ее. Полу-

чаем: 
$$\left(\frac{1}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} = \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)} + \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)}\right) \times$$

$$\times \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2} \cdot \frac{a^2-b^2+a^2+b^2}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)} \cdot (a-b) = \frac{2a^2}{a^{\frac{1}{2}}(a-b)} \cdot (a-b) = 2.$$

Ответ: 2.

**436а)** Запишем первое число в виде числа с рациональным показателем степени  $\sqrt[7]{3^3} = 3^{\frac{3}{7}}$ . Теперь сравним числа  $3^{\frac{3}{7}}$  и  $3^{\frac{19}{8}}$ . Так как основание степеней 3 больше единицы, то большим будет то число, у которого показатель степени больше, т.е.  $3^{\frac{19}{8}} > 3^{\frac{3}{7}}$  или  $3^{\frac{19}{8}} > \sqrt[7]{3^3}$ . Ответ:  $\sqrt[7]{3^3} < 3^{\frac{19}{8}}$ .

**436г)** Второе число запишем в виде числа с рациональным показателем степени  $\sqrt[7]{\frac{1}{32}} = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{7}} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)^{\frac{1}{7}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{7}}$ . Теперь срав-

ним числа  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$  и  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{7}}$ . Так как основание степеней  $\frac{1}{2}$  меньше единицы, то большим будет то число, у которого показатель степени меньше, т.е.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{7}}$  или  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} < \sqrt[7]{\frac{1}{32}}$ .

Ответ:  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} < \sqrt[7]{\frac{1}{32}}$ .

**437г)** Используем свойства степеней. Получаем:  $(-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}} + 19 \cdot (-3)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} - (5^4)^{0,25} - \left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{19}{(-3)^3} = (-2^{-1})^{-4} - 5^1 - \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} - \frac{19}{27} = 2^4 - 5 - \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} - \frac{19}{27} = 16 - 5 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{19}{27} = 11 - \frac{8}{27} - \frac{19}{27} = 10$ . Ответ: 10.

**438б)** Запишем все числа в виде степеней с рациональными показателями, используем формулы сокращенного умножения.

Получаем: 
$$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{1}{4}}}{1 - x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1 + x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^2 \times$$
  

$$\times \left(1 + 2x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{2}} - 1)}{1 - x^{\frac{1}{2}}} + x^{-\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}}\right)^2 \cdot \left(\left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} =$$
  

$$= \left(-x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}}\right)^2 \cdot \left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}}} =$$
  

$$= \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}.$$
 Ответ:  $\frac{1}{\sqrt{x} + 1}$ .

**438г)** Используем формулы сокращенного умножения и упрости-

тим выражение: 
$$\left(\frac{1}{m + \sqrt{2}} - \frac{m^2 + 4}{m^3 + 2\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{m}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{m}\right) =$$
  

$$= \left(\frac{1}{m + \sqrt{2}} - \frac{m^2 + 4}{m^3 + (\sqrt{2})^3}\right) \cdot \frac{m^2 - \sqrt{2}m + 2}{2m} = \left(\frac{1}{m + \sqrt{2}} - \frac{m^2 + 4}{(m + \sqrt{2})(m^2 - \sqrt{2}m + 2)}\right) \times$$
  

$$\times \frac{m^2 - \sqrt{2}m + 2}{2m} = \frac{m^2 - \sqrt{2}m + 2 - m^2 - 4}{(m + \sqrt{2})(m^2 - \sqrt{2}m + 2)} \cdot \frac{m^2 - \sqrt{2}m + 2}{2m} =$$
  

$$= \frac{(-\sqrt{2}m - 2)(m^2 - \sqrt{2}m + 2)}{(m + \sqrt{2})(m^2 - \sqrt{2}m + 2) \cdot 2m} = \frac{-\sqrt{2}(m + \sqrt{2})}{(m + \sqrt{2}) \cdot 2m} = -\frac{1}{\sqrt{2}m}.$$

Ответ:  $\frac{1}{\sqrt{2m}}$ .

**439б)** Используем свойства степеней. Получаем:  $\sqrt[3]{a^2 \sqrt[4]{a}} = (a^2 \cdot a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{9}{4}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{4}}$ . Ответ:  $a^{\frac{3}{4}}$ .

**439г)** Используем свойства степеней. Имеем:  $\frac{1}{3} \cdot \sqrt[4]{27 \sqrt[3]{x}} = \frac{1}{3} (27 \cdot x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = 3^{-1} (3^3)^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{12}} = 3^{-1} \cdot 3^{\frac{3}{4}} x^{\frac{1}{12}} = 3^{-\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{12}}$ . Ответ:  $3^{-\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{12}}$ .

**440б)** Учитывая свойства степеней, представим выражение  $a^{\frac{3}{4}} : b^{\frac{2}{5}}$  в виде корня:  $a^{\frac{3}{4}} : b^{\frac{2}{5}} = \sqrt[4]{a^3} : \sqrt[5]{b^2} = \sqrt[4 \cdot 5]{a^{3 \cdot 5}} : \sqrt[5 \cdot 4]{b^{2 \cdot 4}} = \sqrt[20]{a^{15}} : \sqrt[20]{b^8} = \sqrt[20]{\frac{a^{15}}{b^8}}$ . Ответ:  $\sqrt[20]{\frac{a^{15}}{b^8}}$ .

**441а)** Представим данные числа в виде степеней числа 3. Получаем:  $(\sqrt{3})^{\frac{5}{6}} = (3^{\frac{1}{2}})^{\frac{5}{6}} = 3^{\frac{5}{12}}$  и  $\sqrt[3]{3^{-1} \sqrt[4]{\frac{1}{3}}} = (3^{-1} \cdot 3^{-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = (3^{-\frac{5}{4}})^{\frac{1}{3}} = 3^{-\frac{5}{12}}$ . Видно, что данные числа равны. Ответ:  $(\sqrt{3})^{-\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{3^{-1} \sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$ .

**442а)** Выражение  $(-3)^{-\frac{1}{4}}$  не имеет смысла, т.к. степень с рациональным показателем  $a^r$  определена только при положительном основании  $a$ . Ответ: не имеет смысла.

**443а)** Степень  $(x+1)^{-\frac{2}{7}}$  с рациональным основанием определена только при положительном основании, т.е.  $x+1 > 0$ , откуда  $x > -1$  или  $x \in (-1; \infty)$ . Ответ:  $(-1; \infty)$ .

**444в)** Степень  $(a^8)^{\frac{1}{8}}$  определена при  $a^8 > 0$ , т.е. при  $a \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ . Получаем, используя свойства степеней,  $(a^8)^{\frac{1}{8}} = |a|$ . По условию задачи получаем равенство  $|a| = \frac{1}{|a|}$  или  $|a|^2 = 1$  или  $a^2 = 1$ , откуда  $a = \pm 1$ . Ответ:  $\pm 1$ .

## § 10. Показательная и логарифмическая функции

**446б)** По свойству показательной функции при всех  $x$  величина  $(\frac{1}{3})^x > 0$ . К обеим частям этого неравенства прибавим число 1 и получим  $(\frac{1}{3})^x + 1 > 0 + 1$ , т.е.  $y > 1$ . Следовательно, область значений данной функции  $y \in (1; \infty)$ . Ответ:  $(1; \infty)$ .

**447а)** Число 1 представим в виде  $1 = \left(\frac{4}{7}\right)^0$  и сравним числа  $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$  и  $\left(\frac{4}{7}\right)^0$ . Так как основание  $\frac{4}{7}$  меньше единицы, то функция  $\left(\frac{4}{7}\right)^x$  убывающая. Так как  $-\frac{\sqrt{5}}{2} < 0$ , то степени связаны неравенством противоположного знака, т.е.  $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}} > \left(\frac{4}{7}\right)^0$  или  $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}} > 1$ .

Ответ:  $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}} > 1$ .

**447г)** Показатели степеней связаны неравенством  $\frac{\sqrt{5}}{6} > \frac{1}{3}$ . Так как основание степени 0,3 меньше единицы, то показательная функция  $0,3^x$  убывающая. Поэтому данные степени числа 0,3 связаны неравенством противоположного знака, т.е.  $0,3^{\frac{\sqrt{5}}{6}} < 0,3^{\frac{1}{3}}$ .

Ответ:  $0,3^{\frac{\sqrt{5}}{6}} < 0,3^{\frac{1}{3}}$ .

**448г)** Используем свойства степеней и получим:  $\left(3^{\sqrt[3]{8}}\right)^{\sqrt[3]{4}} = 3^{\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{4}} = 3^{\sqrt[3]{8 \cdot 4}} = 3^{\sqrt[3]{32}} = 3^{\sqrt[3]{2^5}} = 3^2 = 9$ . Ответ: 9.

**449г)** Учтем свойства степеней и получим:  $y^{\sqrt{2}} \cdot y^{1,3} : \sqrt[3]{y^{3\sqrt{2}}} = y^{\sqrt{2} + 1,3} : y^{\sqrt{2}} = y^{1,3}$ . Ответ:  $y^{1,3}$ .

**450а)** Используем формулу для разности квадратов чисел.

Тогда получаем:  $\frac{a^{2\sqrt{2}} - b^{2\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})^2} + 1 = \frac{(a^{\sqrt{2}})^2 - (b^{\sqrt{3}})^2}{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})^2} + 1 = \frac{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})(a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{3}})}{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})^2} + 1 = \frac{a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}} + 1 = \frac{a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{3}} + a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}} = \frac{2a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}}.$

Ответ:  $\frac{2a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}}.$

**450г)** Используем формулу для квадрата суммы и разности двух чисел, а также учтем свойства степеней. Получаем:

$\sqrt{\left(x^\pi + y^\pi\right)^2 - \left(4^{\frac{1}{\pi}}xy\right)^\pi} = \sqrt{x^{2\pi} + 2x^\pi y^\pi + y^{2\pi} - 4x^\pi y^\pi} = \sqrt{x^{2\pi} - 2x^\pi y^\pi + y^{2\pi}} = \sqrt{\left(x^\pi - y^\pi\right)^2} = |x^\pi - y^\pi|.$  Ответ:  $|x^\pi - y^\pi|.$

**4536)** Для функции  $y = (\sqrt{5} - 2)^x$  основание  $(\sqrt{5} - 2)$  меньше единицы. Поэтому эта функция убывающая. Функцию  $y = \frac{1}{(\sqrt{5} - 2)^x}$  запишем в виде  $y = \left(\frac{1}{\sqrt{5} - 2}\right)^x$ . Основание этой функции  $\frac{1}{\sqrt{5} - 2}$  больше единицы. Поэтому эта функция возрастающая.

Ответ:  $y = (\sqrt{5} - 2)^x$  — убывающая,  $y = \left(\frac{1}{\sqrt{5} - 2}\right)^x$  — возрастающая.

**4546)** Найдем область значений функции  $y = |2^x - 2|$ . По свойству показательной функции  $2^x > 0$ . Вычтем из обеих частей неравенства число 2 и получим  $2^x - 2 > -2$ . Учитывая свойство модуля, получаем  $|2^x - 2| \geq 0$ , т.е.  $y \geq 0$ . Следовательно, область значений функции  $y \in [0; \infty)$ . Ответ:  $[0; \infty)$ .

**454г)** Найдем область значений функции  $y = 4^{|x|}$ . По свойству модуля  $|x| \geq 0$ . Так как основание 4 показательной функции больше единицы, то эта функция возрастающая. Поэтому степени числа 4 связаны неравенством того же знака, т.е.  $4^{|x|} \geq 4^0$  или  $4^{|x|} \geq 1$ , т.е.  $y \geq 1$ . Следовательно, область значений функции  $y \in [1; \infty)$ .

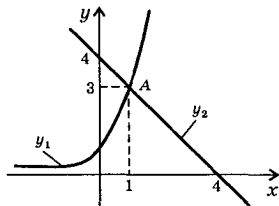
Ответ:  $[1; \infty)$ .

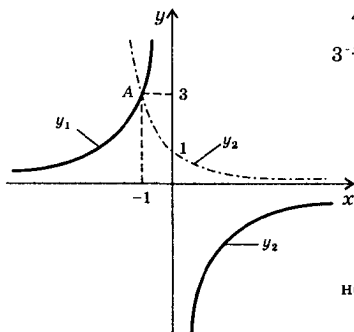
**4556)** Найдем наибольшее и наименьшее значение функции  $y = 5 + 3^{\cos x}$  на  $R$ . Учитывая ограниченность функции косинус и неотрицательность значения модуля, имеем  $0 \leq |\cos x| \leq 1$ . Показательная функция с основанием 3 (большим единицы) возрастающая. Поэтому  $3^0 \leq 3^{\cos x} \leq 3^1$  или  $1 \leq 3^{\cos x} \leq 3$ . Прибавим ко всем частям этого неравенства число 5. Получаем:  $5 + 1 \leq 5 + 3^{\cos x} \leq 5 + 3$  или  $6 \leq y \leq 8$ . Следовательно, наименьшее значение функции равно 6, а наибольшее значение равно 8.

Ответ: наименьшее значение 6, наибольшее значение 8.

**457а)** Для решения уравнения  $3^x = 4 - x$  построим графики функций  $y_1 = 3^x$  и  $y_2 = 4 - x$ . Видно, что эти графики пересекаются в единственной точке А, абсцисса которой  $x = 1$ . Следовательно,  $x = 1$  — корень данного уравнения.

Ответ: 1.





**458г)** Для решения уравнения

$$3^{-x} = -\frac{3}{x} \text{ построим графики функ-}$$

$$\text{ций } y_1 = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x \text{ и } y_2 = -\frac{3}{x}.$$

Видно, что графики этих функций пересекаются в единственной точке А, абсцисса которой  $x = -1$ . Следовательно,  $x = -1$  — корень данного уравнения.

Ответ:  $-1$ .

**460б)** При решении уравнения  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$  запишем его части в виде степеней числа 3. Получаем:  $(3^{-1})^x = 3^3$  или  $3^{-x} = 3^3$ . Если равны степени чисел (при одинаковом основании 3), то равны и показатели степеней:  $-x = 3$ , откуда  $x = -3$ . Ответ:  $-3$ .

**461б)** Обе части уравнения  $\sqrt{8^{x-3}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$  запишем в виде степеней числа 2. Получаем:  $8^{\frac{x-3}{2}} = 4^{\frac{2-x}{3}}$  или  $(2^3)^{\frac{x-3}{2}} = (2^2)^{\frac{2-x}{3}}$  или  $2^{\frac{3x-9}{2}} = 2^{\frac{2-x}{3}}$ . Так как равны степени чисел (при одинаковом основании 2), то равны и показатели степеней:  $3\frac{x-3}{2} = \frac{2-x}{3}$  или  $\frac{3x-9}{2} = \frac{4-2x}{3}$ . По свойству пропорции получаем:  $3(3x-9) = 2(4-2x)$  или  $9x-27 = 8-4x$  или  $13x = 35$ , откуда  $x = \frac{35}{13}$ . Ответ:  $\frac{35}{13}$ .

**462б)** Обе части уравнения  $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \frac{\sqrt{7}}{7}$  представим в виде степеней числа  $\frac{1}{7}$ . Получаем:  $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \frac{1}{\sqrt{7}}$  или  $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \left(\frac{1}{7}\right)^{0,5}$ . Так как равны степени чисел (при одинаковом основании  $\frac{1}{7}$ ), то равны и показатели степеней:  $2x^2 + x - 0,5 = 0,5$  или  $2x^2 + x - 1 = 0$ . Корни этого квадратного уравнения  $x_1 = -1$  и  $x_2 = \frac{1}{2}$  также будут решениями данного уравнения. Ответ:  $-1; \frac{1}{2}$ .

**463а)** При решении уравнения  $7^{x-2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$  в левой части вынесем общий множитель  $7^{x+1}$  за скобки. Получаем:  $7^{x+1}(7 + 4) = 539$  или  $7^{x+1} \cdot 11 = 539$  или  $7^{x+1} = 49$  или  $7^{x+1} = 7^2$ . Так как равны степени чисел (при одинаковом основании 7), то равны и показатели степеней:  $x + 1 = 2$ , откуда  $x = 1$ . Ответ: 1.

**463г)** Для решения уравнения  $3 \cdot 5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77$  в левой части вынесем общий множитель  $5^{x+1}$  за скобки. Получаем:  $5^{x+1}(3 \cdot 5^2 + 2) = 77$  или  $5^{x+1}(3 \cdot 25 + 2) = 77$  или  $5^{x+1} \cdot 77 = 77$  или  $5^{x+1} = 1$  или  $5^{x+1} = 5^0$ . Так как равны степени чисел (при одинаковом основании 5), то равны и показатели степеней  $x + 1 = 0$ , откуда  $x = -1$ . Ответ: -1.

**464а)** Для решения уравнения  $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$  запишем его в виде  $(3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$  и введем новую неизвестную  $t = 3^x > 0$ . Получаем квадратное уравнение  $t^2 - 8t - 9 = 0$ , корни которого  $t_1 = -1$  (не подходит, т.к.  $t > 0$ ) и  $t_2 = 9$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем уравнение:  $3^x = 9$  или  $3^x = 3^2$ , откуда  $x = 2$ .

Ответ: 2.

**464в)** Уравнение  $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$  запишем в виде  $(6^x)^2 - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$  и введем новую неизвестную  $t = 6^x > 0$ . Получаем квадратное уравнение  $t^2 - 4t - 12 = 0$ , корни которого  $t_1 = 6$  и  $t_2 = -2$  (не подходит, т.к.  $t > 0$ ). Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем уравнение  $6^x = 6$ , откуда  $x = 1$ . Ответ: 1.

**465а)** Систему уравнений  $\begin{cases} 4^{x+y} = 16 \\ 4^{x+2y-1} = 1 \end{cases}$  запишем в виде

$\begin{cases} 4^{x+y} = 4^2 \\ 4^{x+2y-1} = 4^0 \end{cases}$ , откуда  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$  или  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ . Вычтем из первого уравнения второе:  $x + y - x - 2y = 2 - 1$  или  $-y = 1$ , тогда  $y = -1$ . Из первого уравнения находим  $x = 2 - y = 3$ .

Ответ: (3; -1).

**465в)** Систему уравнений  $\begin{cases} 3^{2y-x} = \frac{1}{81} \\ 3^{x-y+2} = 27 \end{cases}$  запишем в виде

$\begin{cases} 3^{2y-x} = 3^{-4} \\ 3^{x-y+2} = 3^3 \end{cases}$ , откуда  $\begin{cases} 2y - x = -4 \\ x - y + 2 = 3 \end{cases}$  или  $\begin{cases} 2y - x = -4 \\ x - y = 1 \end{cases}$ . Сложим уравнения системы:  $2y - x + x - y = -4 + 1$  или  $y = -3$ . Из второго уравнения найдем  $x = y + 1 = -3 + 1 = -2$ . Ответ: (-2; -3).

**466а)** Неравенство  $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 27$  запишем в виде  $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ .

Так как основание  $\frac{1}{3}$  меньше единицы, то показатели степеней

связаны неравенством противоположного знака  $x \leq -3$ , т.е.  $x \in (-\infty; -3]$ . Ответ:  $(-\infty; -3]$ .

**466б)** Обе части неравенства  $(\sqrt{6})^x \leq \frac{1}{36}$  запишем в виде степеней числа 3. Получаем:  $(6^{\frac{1}{2}})^x \leq 6^{-2}$  или  $6^{\frac{x}{2}} \leq 6^{-2}$ . Так как основание степеней 6 больше единицы (показательная функция возрастающая), то показатели степеней связаны неравенством того же знака  $\frac{x}{2} \leq -2$ . Умножим обе части этого неравенства на положительное число 2 (при этом знак неравенства сохраняется). Получаем:  $x \leq -4$  или  $x \in (-\infty; -4]$ . Ответ:  $(-\infty; -4]$ .

**467а)** Неравенство  $4^{5-2x} \leq 0,25$  запишем в виде  $4^{5-2x} \leq 4^{-1}$ . Так как основание степеней 4 больше единицы (показательная функция возрастающая), то показатели степеней связаны неравенством того же знака:  $5-2x \leq -1$  или  $5+1 \leq 2x$  или  $6 \leq 2x$ . Разделим обе части этого линейного неравенства на положительное число 2 (при этом знак неравенства сохраняется). Получаем:  $3 \leq x$  или  $x \in [3; \infty)$ . Ответ:  $[3; \infty)$ .

**468в)** В уравнении  $5\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 162$  вынесем в левой части общий множитель  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$  за скобки. Получаем:  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \times \left(5\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} + 1\right) = 162$  или  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \cdot (5 \cdot 2^4 + 1) = 162$  или  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \cdot 81 = 162$  или  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 2$  или  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ . Так как степени (с одинаковым основанием  $\frac{1}{2}$ ) равны, то равны и показатели степеней  $x+1 = -1$ , откуда  $x = -2$ . Ответ:  $-2$ .

**468г)** В левой части уравнения  $5 \cdot 9^x + 9^{x-2} = 406$  вынесем общий множитель  $9^{x-2}$  за скобки:  $9^{x-2}(5 \cdot 9^2 + 1) = 406$  или  $9^{x-2} \times 406 = 406$  или  $9^{x-2} = 1$  или  $9^{x-2} = 9^0$ . Так как степени (с одинаковым основанием 9) равны, то равны и показатели степеней  $x-2 = 0$ , откуда  $x = 2$ . Ответ:  $2$ .

**469а)** Так как  $8^{x+1} \neq 0$  (по свойству показательной степени), то обе части уравнения  $5^{x+1} = 8^{x+1}$  разделим на выражение  $8^{x+1}$ . Получаем:  $\frac{5^{x+1}}{8^{x+1}} = 1$  или  $\left(\frac{5}{8}\right)^{x+1} = \left(\frac{5}{8}\right)^0$ , откуда  $x+1 = 0$  и  $x = -1$ .

Ответ:  $-1$ .

**470а)** Уравнение  $3^x + 3^{3-x} = 12$  запишем в виде  $3^x + \frac{3^3}{3^x} = 12$  или  $3^x + \frac{27}{3^x} = 12$ . Введем новую неизвестную  $t = 3^x > 0$  и получим уравнение  $t + \frac{27}{t} = 12$  или  $t^2 - 12t + 27 = 0$ . Корни этого квадратного уравнения  $t_1 = 3$  и  $t_2 = 9 = 3^2$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем уравнения:  $3^x = 3$  (откуда  $x = 1$ ) и  $3^x = 3^2$  (тогда  $x = 2$ ).

Ответ: 1; 2.

**470б)** Уравнение  $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$  запишем в виде  $(2^{\sqrt{x-2}})^2 + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$  и введем новую неизвестную  $t = 2^{\sqrt{x-2}} \geq 1$ . Получаем квадратное уравнение:  $t^2 + 16 = 10t$  или  $t^2 - 10t + 16 = 0$ , корни которого  $t_1 = 2$  и  $t_2 = 8 = 2^3$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем уравнения:  $2^{\sqrt{x-2}} = 2$  (тогда  $\sqrt{x-2} = 1$  или  $x - 2 = 1$  и  $x = 3$ ) и  $2^{\sqrt{x-2}} = 2^3$  (откуда  $\sqrt{x-2} = 3$  или  $x - 2 = 9$  и  $x = 11$ ).

Ответ: 3; 11.

**471а)** Систему уравнений  $\begin{cases} 5^{x+y} = 125 \\ 4^{(x-y)^2-1} = 1 \end{cases}$  запишем в виде

$\begin{cases} 5^{x+y} = 5^3 \\ 4^{(x-y)^2-1} = 4^0 \end{cases}$ , откуда  $\begin{cases} x + y = 3 \\ (x - y)^2 - 1 = 0 \end{cases}$  или  $\begin{cases} x + y = 3 \\ (x - y)^2 = 1 \end{cases}$ . Извлекая корень из обеих частей второго уравнения, получим две системы.

а)  $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$ . Сложим уравнения системы  $2x = 4$  и  $x = 2$ . Тогда из первого уравнения найдем  $y = 3 - x = 3 - 2 = 1$ .

б)  $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$ . Сложим уравнения системы  $2x = 2$  и  $x = 1$ . Тогда из первого уравнения найдем  $y = 3 - x = 3 - 1 = 2$ .

Итак, данная система уравнений имеет два решения (2; 1) и (1; 2). Ответ: (2; 1), (1; 2).

**471б)** Из первого уравнения системы  $\begin{cases} x + y = 5 \\ 4^x + 4^y = 80 \end{cases}$  выразим  $y = 5 - x$  и подставим во второе уравнение:  $4^x + 4^{5-x} = 80$ . Запишем его в виде  $4^x + \frac{4^5}{4^x} = 80$  и введем новую неизвестную  $t = 4^x > 0$ . Получаем уравнение  $t + \frac{1024}{t} = 80$  или  $t^2 - 80t + 1024 = 0$ . Корни этого квадратного уравнения  $t_1 = 16$  и  $t_2 = 64$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем уравнения:  $4^x = 16$  (корень  $x = 2$ ) и  $4^x = 64$  (корень  $x = 3$ ). Теперь найдем  $y = 5 - x$ . Для  $x = 2$  получаем  $y = 3$ , для  $x = 3$  имеем  $y = 2$ . Ответ: (2; 3), (3; 2).

**472б)** Запишем обе части неравенства  $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x} < (\sqrt{5})^{x^2+3,75}$  в

виде степеней числа 5:  $(5^{-2})^{2x} < (5^{\frac{1}{2}})^{x^2+3,75}$  или  $5^{-4x} < 5^{\frac{x^2+3,75}{2}}$ . Так как основание степеней 5 больше единицы (показательная функция возрастающая), то показатели степеней связаны неравенством того же знака:  $-4x < \frac{x^2+3,75}{2}$  или  $0 < x^2 + 8x + 3,75$ . Корни квадратного трехчлена  $x_1 = -7,5$  и  $x_2 = -0,5$ . Тогда решение квадратного неравенства  $x \in (-\infty; -7,5) \cup (-0,5; \infty)$ .

Ответ:  $(-\infty; -7,5) \cup (-0,5; \infty)$ .

**472в)** Правую часть неравенства  $3^{4x+3} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x^2}{2}}$  представим в

виде степени числа 3:  $3^{4x+3} \leq (3^{-2})^{\frac{x^2}{2}}$  или  $3^{4x+3} \leq 3^{-x^2}$ . Так как основание степеней 3 больше единицы (показательная функция возрастающая), то показатели степеней связаны неравенством того же знака:  $4x + 3 \leq -x^2$  или  $x^2 + 4x + 3 \leq 0$ . Корни квадратного трехчлена  $x_1 = -3$  и  $x_2 = -1$ . Тогда решение квадратного неравенства  $x \in [-3; -1]$ . Ответ:  $[-3; -1]$ .

**473б)** При решении неравенства  $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} < 448$  в левой части вынесем общий множитель  $2^{2x-3}$  за скобки:  $2^{2x-3} \times (2^2 + 2^1 + 1) < 448$  или  $2^{2x-3} \cdot 7 < 448$  или  $2^{2x-3} < 64$  или  $2^{2x-3} < 2^6$ . Так как основание степеней 2 больше единицы (показательная функция возрастающая), то показатели степеней связаны неравенством того же знака:  $2x - 3 < 6$  или  $2x < 9$ , откуда  $x < 4,5$ , т.е.  $x \in (-\infty; 4,5)$ . Ответ:  $(-\infty; 4,5)$ .

**473в)** В левой части неравенства  $\left(\frac{4}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^x > \frac{3}{16}$  вынесем общий множитель  $\left(\frac{4}{3}\right)^x$  за скобки:  $\left(\frac{4}{3}\right)^x \left(\frac{4}{3} - 1\right) > \frac{3}{16}$  или  $\left(\frac{4}{3}\right)^x \times \frac{1}{3} > \frac{3}{16}$ . Умножим обе части неравенства на положительное число 3. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем:  $\left(\frac{4}{3}\right)^x > \frac{9}{16}$

или  $\left(\frac{4}{3}\right)^x > \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$ . Так как основание степеней  $\frac{4}{3}$  больше единицы (показательная функция возрастающая), то показатели степеней связаны неравенством того же знака:  $x > -2$  или  $x \in (-2; \infty)$ .

Ответ:  $(-2; \infty)$ .

**474б)** Неравенство  $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} - 10 \cdot 3^{-x} + 3 < 0$  запишем в виде

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 10 \cdot 3^{-x} + 3 < 0$  или  $3^{2x} \cdot 3 - 10 \cdot 3^{-x} + 3 < 0$  или  $3 \cdot (3^{-x})^2 - 10 \cdot 3^{-x} + 3 < 0$ . Введем новую неизвестную  $t = 3^{-x} > 0$  и получим квадратное неравенство  $3t^2 - 10t + 3 < 0$ . Корни этого квадратного трехчлена  $t_1 = \frac{1}{3}$  и  $t_2 = 3$ . Поэтому решение неравенства  $\frac{1}{3} < t < 3$ .

Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем  $3^{-1} < 3^{-x} < 3$ . Так как основание степеней 3 больше единицы (показательная функция возрастающая), то показатели степеней связаны неравенством того же знака  $-1 < -x < 1$ . Умножим все части неравенства на отрицательное число  $(-1)$ . При этом знаки неравенства меняются на противоположные. Получаем:  $1 > x > -1$  или  $x \in (-1; 1)$ .

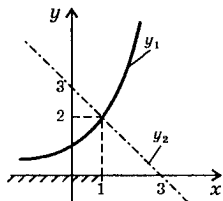
Ответ:  $(-1; 1)$ .

**474г)** Запишем неравенство  $\left(\frac{1}{36}\right)^x - 5 \cdot 6^{-x} - 6 \leq 0$  в виде  $(6^{-x})^2 -$

$- 5 \cdot 6^{-x} - 6 \leq 0$  и введем новую неизвестную  $t = 6^{-x} > 0$ . Получаем квадратное неравенство  $t^2 - 5t - 6 \leq 0$ , решение которого  $-1 \leq t \leq 6$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Получаем неравенство  $-1 \leq 6^{-x} \leq 6$ . Так как  $6^{-x} > 0$  при всех  $x$ , то левая часть неравенства выполнена. Решим неравенство  $6^{-x} \leq 6$ . Так как основание степеней 6 больше единицы, то показатели степеней связаны неравенством того же знака:  $-x \leq 1$ . Умножим обе части на отрицательное число  $(-1)$ . При этом знак неравенства меняется на противоположный:  $x \geq -1$  или  $x \in [-1; \infty)$ . Ответ:  $[-1; \infty)$ .

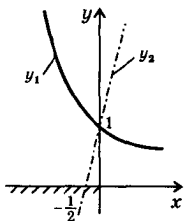
**475а)** Для решения неравенства  $2^x \leq 3 - x$  построим графики функций  $y_1 = 2^x$  и  $y_2 = 3 - x$ . Необходимо определить значения  $x$ , при которых  $y_1 \leq y_2$ . Графики функций  $y_1$  и  $y_2$  пересекаются в точке с абсциссой  $x = 1$ . Из рисунка видно, что значения первой функции не больше значений второй при  $x \leq 1$ . Поэтому решение данного неравенства  $x \in (-\infty; 1]$ .

Ответ:  $(-\infty; 1]$ .



**475в)** Для решения неравенства  $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 2x + 1$  построим графики

функций  $y_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^x$  и  $y_2 = 2x + 1$ . Необходимо определить значения  $x$ , при которых  $y_1 \geq y_2$ . Графики функций  $y_1$  и  $y_2$  пересекаются в точ-



ке с абсциссой  $x = 0$ . Из рисунка видно, что значения первой функции не меньше значений второй при  $x \leq 0$ . Поэтому решение данного неравенства  $x \in (-\infty; 0]$ .

Ответ:  $(-\infty; 0]$ .

**476а)** По определению логарифма  $\log_3 9 = 2$ , т.к.  $3^2 = 9$ . Ответ: 2.

**477в)** По определению логарифма  $\log_{32} 2 = \frac{1}{5}$ , т.к.  $32^{\frac{1}{5}} = 2$ .

Ответ:  $\frac{1}{5}$ .

**478б)** По определению логарифма  $\log_{32} 8 = \frac{3}{5}$ , т.к.  $32^{\frac{3}{5}} = (2^5)^{\frac{3}{5}} = 2^3 = 8$ . Ответ:  $\frac{3}{5}$ .

**479а)** По определению логарифма  $\log_3 \frac{1}{81}$  — степень, в которую надо возвести основание 3, чтобы получить число  $\frac{1}{81}$ . Проверим это:  $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$ . Ответ: проверено.

**481б)** По определению логарифма  $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 27$  — степень, в которую надо возвести основание  $\sqrt{\frac{1}{3}}$ , чтобы получить число 27. Проверим это:  $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{-6} = \left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^{-6} = 3^3 = 27$ . Ответ: проверено.

**483б)** Используя определение логарифма (степень, в которую надо возвести основание 8, чтобы получить данное число), найдем:  $\log_8 64 = 2$ , т.к.  $8^2 = 64$ ;  $\log_8 \frac{1}{8} = -1$ , т.к.  $8^{-1} = \frac{1}{8}$  и  $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ , т.к.  $8^{\frac{1}{3}} = 2$ . Ответ: 2; -1;  $\frac{1}{3}$ .

**484б)** Для решения уравнения  $\log_6 x = -3$  используем определение логарифма (степень, в которую надо возвести основание  $\frac{1}{6}$ , чтобы получить число  $x$ ). Тогда имеем:  $x = \left(\frac{1}{6}\right)^{-3} = (6^{-1})^{-3} = 6^3 = 216$ . Ответ: 216.

**486б)** Для решения уравнения  $\log_x \frac{1}{16} = 2$  воспользуемся определением логарифма (степень, в которую надо возвести основание  $x$ , чтобы получить число  $\frac{1}{16}$ ). Тогда имеем:  $x^2 = \frac{1}{16}$ , откуда  $x = \pm \frac{1}{4}$ . Однако по определению логарифма основанием не может быть отрицательное число. Поэтому остается одно значение  $x = \frac{1}{4}$ .

Ответ:  $\frac{1}{4}$ .

**487а)** Запишем данные числа в виде логарифма с основанием 4, используя определение логарифма. Пусть  $2 = \log_4 x$ . Тогда по определению  $x = 4^2 = 16$  и можно записать  $2 = \log_4 16$ . Аналогично запишем оставшиеся числа:  $\frac{1}{2} = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \log_4 2$ ;  $1 = \log_4 4^1 = \log_4 4$  и  $0 = \log_4 4^0 = \log_4 1$ . Ответ:  $\log_4 16$ ;  $\log_4 2$ ;  $\log_4 4$ ;  $\log_4 1$ .

**488б)** Используя основное логарифмическое тождество, запишем:  $\pi^{\log_{\pi} 5,2} = 5,2$ . Ответ: 5,2.

**489г)** Запишем выражение  $\left(\frac{1}{7}\right)^{1 + \log_{\frac{1}{7}} 2}$  в виде  $\left(\frac{1}{7}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{\frac{1}{7}} 2}$ . Пользуясь основным логарифмическим тождеством, получаем:  $\frac{1}{7} \cdot 2 = \frac{2}{7}$ . Ответ:  $\frac{2}{7}$ .

**490в)** Используя свойства степеней, данное выражение запишем в виде  $\left(\frac{1}{2}\right)^{4 \log_{\frac{1}{2}} 3} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3}\right)^4 = 3^4 = 81$ . Ответ: 81.

**491б)** Используя свойства степеней, сначала упростим данное

выражение:  $\left(\frac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}}\right)^{-0,2} = \left(\frac{a^{10}}{b^{\frac{5}{6}}}\right)^{-0,2} = \frac{(a^{10})^{-0,2}}{\left(b^{\frac{5}{6}}\right)^{-0,2}} = \frac{a^{-2}}{b^{-\frac{1}{6}}} = a^{-2} b^{\frac{1}{6}}$ . Теперь най-

дем логарифм по основанию 3, пользуясь свойствами логарифмов:

$$\log_3 \left( a^{-2} b^{\frac{1}{6}} \right) = \log_3 a^{-2} + \log_3 b^{\frac{1}{6}} = -2 \log_3 a + \frac{1}{6} \log_3 b.$$

Ответ:  $-2 \log_3 a + \frac{1}{6} \log_3 b$ .

**492в)** Запишем данное выражение  $\sqrt[3]{10 a^{\frac{1}{3}} b^4 c^{-\frac{1}{2}}}$  в виде  $10^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{9}} b^{\frac{4}{3}} c^{-\frac{1}{6}}$ . Используя свойства логарифмов, найдем десятичный логарифм этого выражения:

$$\lg \left( 10^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} b^4 c^{-\frac{1}{2}} \right) = \lg 10^{\frac{1}{3}} + \lg a^{\frac{1}{3}} + \lg b^4 + \lg c^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \lg 10 + \frac{1}{3} \lg a + 4 \lg b - \frac{1}{2} \lg c = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \lg a + 4 \lg b - \frac{1}{2} \lg c. \text{ Учтено, что } \lg 10 = 1.$$

Ответ:  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \lg a + 4 \lg b - \frac{1}{2} \lg c.$

**494а)** Число 72 разложим на простые множители  $72 = 2^3 \cdot 3^2$  и преобразуем число  $\log_5 72$ , пользуясь свойствами логарифмов. Получаем:  $\log_5 72 = \log_5 (2^3 \cdot 3^2) = \log_5 2^3 + \log_5 3^2 = 3 \log_5 2 + 2 \log_5 3$ . Так как по условию  $\log_5 2 = a$  и  $\log_5 3 = b$ , то получаем  $\log_5 72 = 3a + 2b$ . Ответ:  $3a + 2b$ .

**495б)** Известно, что разность логарифмов чисел равна логарифму частного этих чисел. Поэтому получаем:  $\log_2 7 - \log_2 \frac{7}{16} = \log_2 \left( 7 : \frac{7}{16} \right) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4$ . Ответ: 4.

**496а)** Воспользуемся свойствами логарифмов. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\lg 8 + \lg 18}{2 \lg 2 + \lg 3} &= \frac{\lg 2^3 + \lg (2 \cdot 3^2)}{2 \lg 2 + \lg 3} = \frac{3 \lg 2 + \lg 2 + \lg 3^2}{2 \lg 2 + \lg 3} = \frac{4 \lg 2 + 2 \lg 3}{2 \lg 2 + \lg 3} = \\ &= \frac{2(2 \lg 2 + \lg 3)}{2 \lg 2 + \lg 3} = 2. \end{aligned} \quad \text{Ответ: } 2.$$

**497а)** Для вычисления  $x$  преобразуем правую часть равенства, используя свойства логарифмов. Получаем:  $\log_6 x = 3 \log_6 2 + 0,5 \log_6 25 - 2 \log_6 3 = \log_6 2^3 + \log_6 25^{0,5} - \log_6 3^2 = \log_6 8 + \log_6 5 - \log_6 9 = \log_6 \frac{8 \cdot 5}{9} = \log_6 \frac{40}{9}$ . Имеем равенство  $\log_6 x = \log_6 \frac{40}{9}$ . Так как равны логарифмы (по одинаковому основанию 6) чисел, то равны и сами числа  $x = \frac{40}{9}$ . Ответ:  $\frac{40}{9}$ .

**497б)** Используя свойства логарифмов, преобразуем правую часть данного равенства:  $\lg x = \frac{1}{2} \lg 5a - 3 \lg b + 4 \lg c = \lg (5a)^{\frac{1}{2}} - \lg b^3 + \lg c^4 = \lg \frac{(5a)^{\frac{1}{2}} \cdot c^4}{b^3} = \lg \frac{c^4 \sqrt{5a}}{b^3}$ . Имеем равенство  $\lg x = \lg \frac{c^4 \sqrt{5a}}{b^3}$ . Так как равны логарифмы (по одинаковому основанию 10), то равны и сами числа  $x = \frac{c^4 \sqrt{5a}}{b^3}$ . Ответ:  $\frac{c^4 \sqrt{5a}}{b^3}$ .

**498а)** В неравенстве  $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2$  в первом логарифме перейдем к основанию 3:  $\log_{\frac{1}{2}} 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 \frac{1}{2}} = \frac{1}{\log_3 \frac{1}{2}}$ . Тогда неравенство имеет вид:  $\frac{1}{\log_3 \frac{1}{2}} + \log_3 \frac{1}{2} < -2$ . Обозначим  $a = \log_3 \frac{1}{2}$  и запишем неравенство в виде:  $\frac{1}{a} + a < -2$  или  $\frac{1}{a} + a + 2 < 0$  или  $\frac{1 + a^2 + 2a}{a} < 0$  или  $\frac{(a+1)^2}{a} < 0$ . Так как  $a \neq -1$ , то числитель дроби  $(a+1)^2$  положительный. Число  $a = \log_3 \frac{1}{2}$  отрицательное. Поэтому неравенство  $\frac{(a+1)^2}{a} < 0$  или  $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2$  верное. Ответ: доказано.

**498б)** Для доказательства равенства  $4^{\log_5 7} = 7^{\log_5 4}$  преобразуем его части, используя основное логарифмическое тождество и свойства степеней. Запишем число 4 в виде  $4 = 5^{\log_5 4}$ , тогда левая часть имеет вид  $4^{\log_5 7} = (5^{\log_5 4})^{\log_5 7} = 5^{\log_5 4 \cdot \log_5 7}$ . Число 7 запишем в виде  $7 = 5^{\log_5 7}$ , тогда правая часть  $7^{\log_5 4} = (5^{\log_5 7})^{\log_5 4} = 5^{\log_5 7 \cdot \log_5 4}$ . Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, равенство доказано. Ответ: доказано.

**500а)** Область определения выражения  $\log_{\sqrt{10}}(6+x-x_2)$  задается неравенством  $6+x-x^2 > 0$  (т.к. логарифм определен только для положительных величин). Неравенство запишем в виде  $0 > x^2 - x - 6$ . Его решение  $x \in (-2; 3)$ . Ответ:  $(-2; 3)$ .

**500б)** Область определения выражения  $\lg \frac{2x+5}{x-1}$  задается неравенством  $\frac{2x+5}{x-1} > 0$  (т.к. логарифм определен только для положительных величин). Решим это неравенство, например, методом интервалов. Получаем  $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup (1; \infty)$ .



Ответ:  $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup (1; \infty)$ .

**501a)** Так как основание логарифмов 2 больше единицы, то логарифмическая функция  $y = \log_2 x$  возрастающая. Данные числа связаны неравенством  $3,8 < 4,7$ . Поэтому логарифмы этих чисел связаны неравенством того же знака:  $\log_2 3,8 < \log_2 4,7$ .

Ответ:  $\log_2 3,8 < \log_2 4,7$ .

**501б)** Так как основание логарифмов  $\frac{1}{3}$  меньше единицы, то логарифмическая функция  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$  убывающая. Данные числа связаны неравенством  $0,15 < 0,2$ . Поэтому логарифмы этих чисел связаны неравенством противоположного знака:  $\log_{\frac{1}{3}} 0,15 > \log_{\frac{1}{3}} 0,2$ .

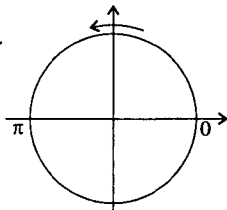
Ответ:  $\log_{\frac{1}{3}} 0,15 > \log_{\frac{1}{3}} 0,2$ .

**502a)** Число 1 запишем в виде  $1 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}$ . Теперь сравним числа  $\log_{\sqrt{2}} 3$  и  $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}$ . Так как основание логарифмов  $\sqrt{2}$  больше единицы, то логарифмическая функция  $y = \log_{\sqrt{2}} x$  возрастает. Числа связаны неравенством  $3 > \sqrt{2}$ . Поэтому логарифмы этих чисел связаны неравенством того же знака:  $\log_{\sqrt{2}} 3 > \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}$  или  $\log_{\sqrt{2}} 3 > 1$ .

Ответ:  $\log_{\sqrt{2}} 3 > 1$ .

**503a)** Оценим числа  $\log_2 10$  и  $\log_5 30$ . Основания логарифмов 2 и 5 больше единицы, поэтому соответствующие логарифмические функции возрастающие. Число 10 оценим степенями числа 2:  $2^3 < 10 < 2^4$ , тогда  $\log_2 2^3 < \log_2 10 < \log_2 2^4$  или  $3 < \log_2 10 < 4$ . Число 30 оценим степенями числа 5:  $5^2 < 30 < 5^3$ , поэтому  $\log_5 5^2 < \log_5 30 < \log_5 5^3$  или  $2 < \log_5 30 < 3$ . Получили, что  $\log_2 10 > 3$  и  $\log_5 30 < 3$ . Следовательно,  $\log_5 30 < \log_2 10$ .

Ответ:  $\log_5 30 < \log_2 10$ .



**505a)** Область определения выражения  $\log_2 \sin x$  задается неравенством  $\sin x > 0$ . Видно, что это неравенство выполнено для углов, расположенных в первой и второй четвертях. Поэтому решение неравенства  $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**505r)** Область определения выражения  $\lg(1 - 3^x)$  задается неравенством  $1 - 3^x > 0$  (т.к. логарифм определен только для положительных величин). Решим это неравенство:  $1 > 3^x$  или  $3^0 > 3^x$ . Так как основание степеней 3 больше единицы (показательная функция возрастает), то показатели степеней связаны неравенством того же знака:  $0 > x$  или  $x \in (-\infty; 0)$ .

Ответ:  $(-\infty; 0)$ .

**506а)** Преобразуем данное выражение, используя свойства логарифмов и формулу для разности кубов двух чисел. Имеем:

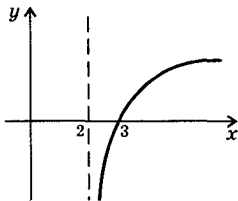
$$\log_4(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3}) + \log_4(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9}) = \log_4 \left[ (\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3}) \left( (\sqrt[3]{7})^2 + \sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2 \right) \right] = \log_4 \left[ (\sqrt[3]{7})^3 - (\sqrt[3]{3})^3 \right] = \log_4(7 - 3) = \log_4 4 = 1.$$

Ответ: 1.

**506в)** Преобразуем данное выражение, используя свойства логарифмов:  $\lg \operatorname{tg} 4 + \lg \operatorname{ctg} 4 = \lg (\operatorname{tg} 4 \cdot \operatorname{ctg} 4) = \lg 1 = 0$ . Ответ: 0.

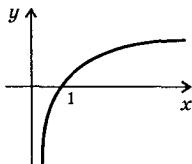
**507а)** График функции  $y = \log_3(x - 2)$  получается из графика функции  $y = \log_3 x$  его смещением на две единицы вправо вдоль оси абсцисс.

Ответ: см. график.



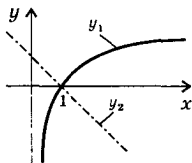
**507б)** Запишем функцию  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  в виде  $y = -\frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\frac{\log_2 x}{-1} = \log_2 x$ . Таким образом, надо построить хорошо известный график  $y = \log_2 x$ .

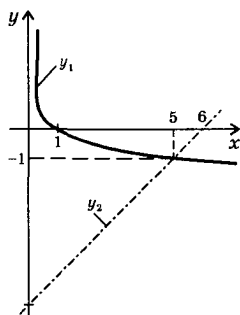
Ответ: см. график.



**508б)** Преобразуем правую часть уравнения, используя свойства логарифмов:  $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{0.2} 35 - 2 \log_{0.2} 25\sqrt{7} = \log_{0.2} 35 - \log_{0.2} (25\sqrt{7})^2 = \log_{0.2} \frac{35}{(25\sqrt{7})^2} = \log_{0.2} \frac{35}{25^2 \cdot 7} = \log_{0.2} \frac{5 \cdot 7}{(5^2)^2 \cdot 7} = \log_{0.2} \frac{5}{5^4} = \log_{\frac{1}{5}} \left( \frac{1}{5} \right)^3 = 3$ . Получили  $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$ , тогда по определению логарифма  $x = \left( \frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}$ . Ответ:  $\frac{1}{8}$ .

**509а)** Для решения уравнения  $\lg x = 1 - x$  построим графики функций  $y_1 = \lg x$  и  $y_2 = 1 - x$ . Видно, что графики пересекаются в единственной точке (1; 0). Поэтому корень данного уравнения  $x = 1$ . Ответ: 1.





**509в)** Для решения уравнения

$\log_5 x = x - 6$  построим графики функций  $y_1 = \log_5 x$  и  $y_2 = x - 6$ . Видно, что графики этих функций пересекаются в единственной точке, абсцисса которой  $x = 5$ . Следовательно, корень данного уравнения  $x = 5$ .

Ответ: 5.

**511а)** Функция  $f(x) = \log_4 x$  убывающая, т.к. основание логарифма меньше единицы. Поэтому на промежутке  $I = [1; 4]$  функция принимает наибольшее

значение на левой границе промежутка  $y_{\text{наиб}} = f(1) = \log_4 1 = 0$ . Наименьшее значение функция принимает на правой границе промежутка  $y_{\text{наим}} = f(4) = \log_4 4 = -1$ . Ответ: 0; -1.

**512в)** При решении уравнения  $2^x = 10$  учтем определение логарифма и получим  $x = \log_2 10$ . Ответ:  $\log_2 10$ .

**513б)** Для решения уравнения  $\log_{0,4} x = -1$  воспользуемся определением логарифма  $x = 0,4^{-1} = \frac{1}{0,4} = 2,5$ . Ответ: 2,5.

**514а)** При решении уравнения  $\log_{\frac{1}{2}} (2x - 4) = -2$  используем определение логарифма. Имеем:  $2x - 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$  или  $2x - 4 = 4$ , откуда  $x = 4$ . Ответ: 4.

**514б)** Так как равны логарифмы величин  $\log_{\pi} (x^2 + 2x + 3) = \log_{\pi} 6$  по одному основанию, то равны и сами величины:  $x^2 + 2x + 3 = 6$  или  $x^2 + 2x - 3 = 0$ . Корни этого квадратного уравнения  $x_1 = 1$  и  $x_2 = -3$ . Ответ: 1; -3.

**515б)** Для решения уравнения  $5^{x^2} = 7$  используем определение логарифма и получим  $x^2 = \log_5 7$ , тогда  $x = \pm \sqrt{\log_5 7}$ .

Ответ:  $\pm \sqrt{\log_5 7}$ .

**516а)** При решении неравенства  $\log_3 x > 2$  запишем ОДЗ:  $x > 0$  (т.к. логарифм определен только для положительных величин). Правую часть неравенства также представим в виде логарифма по основанию 3:  $2 = \log_3 9 = \log_3 9$ . Имеем неравенство  $\log_3 x > \log_3 9$ . Так как основание логарифмов 3 больше единицы (логарифмическая

функция возрастающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством того же знака  $x > 9$ . С учетом ОДЗ получаем решение неравенства  $x \in (9; \infty)$ . Ответ:  $(9; \infty)$ .

**5166)** Для неравенства  $\log_{0,5} x > -2$  запишем ОДЗ:  $x > 0$  (т.к. логарифм определен только для положительных величин). Правую часть неравенства также представим в виде логарифма по основанию 0,5:  $-2 = \log_{0,5} 0,5^{-2} = \log_{0,5} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \log_{0,5} 4$ . Имеем неравенство  $\log_{0,5} x > \log_{0,5} 4$ . Так как основание логарифмов 0,5 меньше единицы (логарифмическая функция убывающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством противоположного знака  $x < 4$ . С учетом ОДЗ получаем решение данного неравенства  $x \in (0; 4)$ .

Ответ:  $(0; 4)$ .

**5176)** Запишем ОДЗ неравенства  $\log_{\frac{1}{3}} (3-2x) > -1$ . ОДЗ задается неравенством  $3-2x > 0$ , откуда  $x < \frac{3}{2}$ . Представим число  $-1$  в виде  $-1 = \log_{\frac{1}{3}} 3$ . Получаем неравенство  $\log_{\frac{1}{3}} (3-2x) > \log_{\frac{1}{3}} 3$ . Так как основание логарифмов  $\frac{1}{3}$  меньше единицы (логарифмическая функция убывающая), то аргументы логарифмов связаны неравенством противоположного знака:  $3-2x < 3$ , откуда  $0 < 2x$  и  $x > 0$ . С учетом ОДЗ получаем решение данного неравенства  $x \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$ .

Ответ:  $\left(0; \frac{3}{2}\right)$ .

**518а)** Для уравнения  $\log_a x = 2\log_a 3 + \log_a 5$  выпишем ОДЗ:  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x > 0$ . Используя свойства логарифмов, преобразуем правую часть уравнения:  $\log_a x = \log_a 3^2 + \log_a 5 = \log_a 9 + \log_a 5 = \log_a (9 \cdot 5) = \log_a 45$ . Так как равны логарифмы величин (по одинаковому основанию  $a$ ), то равны и сами величины  $x = 45$ . Учитывая ОДЗ запишем ответ (принято записывать в порядке возрастания параметра  $a$ ).

Ответ: при  $a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$   $x \in \emptyset$ , при  $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$   $x = 45$ .

**5186)** Для уравнения  $\lg(x-9) + \lg(2x-1) = 2$  запишем ОДЗ, которая задается условиями  $x-9 > 0$  и  $2x-1 > 0$ , откуда  $x > 9$ . Используя свойства логарифмов, получаем уравнение  $\lg[(x-9)(2x-1)] = 2 = \lg 100$ . Так как равны логарифмы величин, то равны и сами величины  $(x-9)(2x-1) = 100$ . Решим это уравнение:  $2x^2 - x - 18x + 9 = 100$  или  $2x^2 - 19x - 91 = 0$ . Корни уравнения  $x_{1,2} =$

$$= \frac{19 \pm \sqrt{361 + 4 \cdot 2 \cdot 91}}{4} = \frac{19 \pm \sqrt{1089}}{4} = \frac{19 \pm 33}{4}, \text{ т.е. } x_1 = 13 \text{ и } x_2 = -\frac{7}{2}.$$

В ОДЗ входит только решение  $x = 13$ . Ответ: 13.

**519а)** Найдем ОДЗ уравнения  $\frac{1}{2} \log_2(x-4) + \frac{1}{2} \log_2(2x-1) = \log_2 3$ , которая задается неравенствами  $x-4 > 0$  и  $2x-1 > 0$ , откуда  $x > 4$ . Умножим обе части уравнения на 2 и используем свойства логарифмов. Получаем:  $\log_2(x-4) + \log_2(2x-1) = 2\log_2 3$  или  $\log_2[(x-4)(2x-1)] = \log_2 3^2$ , откуда  $(x-4)(2x-1) = 9$ . Решим это уравнение:  $2x^2 - x - 8x + 4 = 9$  или  $2x^2 - 9x - 5 = 0$ . Корни квадратного уравнения  $x_1 = 5$  и  $x_2 = -\frac{1}{2}$ . В ОДЗ входит только решение  $x = 5$ . Ответ: 5.

**520а)** Уравнение  $\log_4^2 x + \log_4 \sqrt{x} - 1,5 = 0$  запишем в виде  $\log_4^2 x + 0,5 \log_4 x - 1,5 = 0$ . Введем новую неизвестную  $t = \log_4 x$  и получим квадратное уравнение:  $t^2 + 0,5t - 1,5 = 0$  или  $2t^2 + t - 3 = 0$ . Корни этого уравнения  $t_1 = 1$  и  $t_2 = -\frac{3}{2}$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем уравнения:  $\log_4 x = 1$  (откуда  $x = 4^1 = 4$ ) и  $\log_4 x = -\frac{3}{2}$  (тогда  $x = 4^{-\frac{3}{2}} = (2^2)^{-\frac{3}{2}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$ ). Ответ: 4;  $\frac{1}{8}$ .

**521а)** Преобразуем второе уравнение системы  $\begin{cases} x + y = 7 \\ \lg x + \lg y = 1 \end{cases}$ . Получаем:  $\lg(x \cdot y) = \lg 10$ , откуда  $xy = 10$ . Тогда система имеет вид  $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 10 \end{cases}$ . Из первого уравнения выразим  $y = 7 - x$  и подставим во второе уравнение:  $x(7 - x) = 10$  или  $0 = x^2 - 7x + 10$ . Корни этого квадратного уравнения  $x_1 = 2$  (тогда  $y_1 = 7 - x_1 = 5$ ) и  $x_2 = 5$  (тогда  $y_2 = 7 - x_2 = 2$ ). Итак, система имеет два решения (2; 5) и (5; 2). Ответ: (2; 5), (5; 2).

**521б)** Используя свойства логарифмов, преобразуем уравнения системы  $\begin{cases} \log_4(x+y) = 2 \\ \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 7 \end{cases}$ . Получаем:  $\begin{cases} \log_4(x+y) = \log_4 4^2 \\ \log_3(xy) = \log_3 9 + \log_3 7 \end{cases}$  или  $\begin{cases} x+y = 16 \\ \log_3(xy) = \log_3(9 \cdot 7) \end{cases}$  или  $\begin{cases} x+y = 16 \\ xy = 63 \end{cases}$ . Из первого уравнения выразим  $y = 16 - x$  и подставим во второе уравнение:  $x(16 - x) = 63$  или  $0 = x^2 - 16x + 63$ . Корни

этого квадратного уравнения  $x_1 = 7$  (тогда  $y_1 = 16 - x_1 = 9$ ) и  $x_2 = 9$  (тогда  $y_2 = 16 - x_2 = 7$ ). Система имеет два решения (7; 9) и (9; 7).

Ответ: (7; 9), (9; 7).

**522а)** Для решения уравнения  $\frac{1}{\lg x + 1} + \frac{6}{\lg x + 5} = 1$  введем новую неизвестную  $y = \lg x + 1$ . Тогда уравнение имеет вид:  $\frac{1}{y} + \frac{6}{y+4} = 1$  или  $y + 4 + 6y = y(y+4)$  или  $0 = y^2 - 3y - 4$ . Корни этого квадратного уравнения  $y_1 = -1$  и  $y_2 = 4$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Получаем два уравнения.

а)  $\lg x + 1 = -1$ , откуда  $\lg x = -2$  и по определению логарифма  $x = 10^{-2} = \frac{1}{100}$ .

б)  $\lg x + 1 = 4$ , тогда  $\lg x = 3$  и  $x = 10^3 = 1000$ .

Ответ:  $\frac{1}{100}$ ; 1000.

**522б)** Учтем, что логарифм частного равен разности логарифмов числителя и знаменателя. Преобразуем уравнение  $\log_2 \frac{x}{4} =$

$= \frac{15}{\log_2 \frac{x}{8} - 1}$ . Получаем:  $\log_2 x - \log_2 4 = \frac{15}{\log_2 x - \log_2 8 - 1}$  или  $\log_2 x -$

$-2 = \frac{15}{\log_2 x - 3 - 1}$  или  $\log_2 x - 2 = \frac{15}{\log_2 x - 4}$ . Введем новую неизвест-

ную  $y = \log_2 x$ . Имеем уравнение:  $y - 2 = \frac{15}{y - 4}$  или  $y^2 - 6y + 8 = 15$  или  $y^2 - 6y - 7 = 0$ . Корни этого квадратного уравнения  $y_1 = -1$  и  $y_2 = 7$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Получаем уравнения.

а)  $\log_2 x = -1$ , откуда  $x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$  (по определению логарифма).

б)  $\log_2 x = 7$ , тогда  $x = 2^7 = 128$ .

Ответ:  $\frac{1}{2}$ ; 128.

**523а)** Для уравнения  $\log_a x = \log_{\sqrt{a}} 2 + \log_{\frac{1}{a}} 3$  запишем ОДЗ:  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  и  $x > 0$ . В логарифмах перейдем к новому основанию  $a$ .

Получаем:  $\log_a x = \frac{\log_a 2}{\log_a \sqrt{a}} + \frac{\log_a 3}{\log_a \frac{1}{a}}$  или  $\log_a x = \frac{\log_a 2}{\frac{1}{2}} + \frac{\log_a 3}{-1}$  или

$\log_a x = 2\log_a 2 - \log_a 3$  или  $\log_a x = \log_a 2^2 - \log_a 3$  или  $\log_a x = \log_a \frac{4}{3}$ ,

откуда  $x = \frac{4}{3}$ .

Ответ: при  $a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$  решений нет; при  $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$   $x = \frac{4}{3}$ .

**5236)** Для решения уравнения  $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$  в логарифмах перейдем к основанию 2. Получаем:  $\frac{\log_2 2}{\log_2 x} - \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \frac{7}{6} = 0$  или  $\frac{1}{\log_2 x} - \frac{\log_2 x}{2} + \frac{7}{6} = 0$ . Введем новую неизвестную  $y = \log_2 x$  и получим уравнение:  $\frac{1}{y} - \frac{y}{2} + \frac{7}{6} = 0$  или  $6 - 3y^2 + 7y = 0$  или  $0 = 3y^2 - 7y + 6$ . Корни этого квадратного уравнения  $y_1 = 3$  и  $y_2 = -\frac{2}{3}$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Получаем уравнения.

а)  $\log_2 x = 3$ , откуда  $x = 2^3 = 8$  (по определению логарифма).

б)  $\log_2 x = -\frac{2}{3}$ , тогда  $x = 2^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2}$ .

Ответ:  $8; \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ .

**524а)** При решении уравнения  $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$  используем определение логарифма:  $9 - 2^x = 2^{3-x}$  или  $9 - 2^x = \frac{2^3}{2^x}$ . Введем новую неизвестную  $y = 2^x > 0$  и получим уравнение:  $9 - y = \frac{8}{y}$  или  $y^2 - 9y + 8 = 0$ . Корни этого квадратного уравнения  $y_1 = 1$  и  $y_2 = 8$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Получаем уравнения.

а)  $2^x = 1$  или  $2^x = 2^0$ , откуда  $x = 0$ .

б)  $2^x = 8$  или  $2^x = 2^3$ , тогда  $x = 3$ .

Ответ: 0; 3.

**524б)** Для решения уравнения  $\log_2(25^{x+3} - 1) = 2 + \log_2(5^{x+3} + 1)$  введем новую неизвестную  $y = 5^{x+3} > 0$  и получим уравнение  $\log_2(y^2 - 1) = \log_2 2^2 + \log_2(y + 1)$  или  $\log_2(y^2 - 1) = \log_2[4(y + 1)]$ , откуда  $y^2 - 1 = 4(y + 1)$  или  $(y - 1)(y + 1) = 4(y + 1)$ . Так как  $y > 0$ , то величина  $y + 1 \neq 0$ . Разделим обе части уравнения на  $(y + 1)$  и получим  $y - 1 = 4$ , откуда  $y = 5$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем уравнение  $5^{x+3} = 5$ , откуда  $x + 3 = 1$  и  $x = -2$ . Ответ: -2.

**525а)** ОДЗ неравенства  $\lg(2x - 3) > \lg(x + 1)$  определяется условиями  $2x - 3 > 0$  и  $x + 1 > 0$ . Так как основание логарифмов 10 больше единицы (логарифмическая функция возрастающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством того же знака  $2x - 3 > x + 1$ . С учетом этого неравенства понятно, что если  $x + 1 > 0$ , то тем более  $2x - 3 > 0$ . Поэтому данное логарифмическое неравенство эквивалентно системе линейных неравенств:  $\begin{cases} 2x - 3 > x + 1 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$

или  $\begin{cases} x > 4 \\ x > -1 \end{cases}$ , откуда  $x > 4$  или  $x \in (4; \infty)$ . Ответ:  $(4; \infty)$ .

**5256)** ОДЗ неравенства  $\log_{0,3}(2x - 4) > \log_{0,3}(x + 1)$  определяется условиями  $2x - 4 > 0$  и  $x + 1 > 0$ . Так как основание логарифмов 0,3 меньше единицы (логарифмическая функция убывающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством противоположного знака  $2x - 4 < x + 1$ . С учетом этого неравенства понятно, что если  $2x - 4 > 0$ , то тем более  $x + 1 > 0$ . Поэтому данное логарифмическое неравенство эквивалентно системе линейных нера-

$$\text{венств } \begin{cases} 2x - 4 < x + 1 \\ 2x - 4 > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 5 \\ x > 2 \end{cases}, \text{ откуда } 2 < x < 5 \text{ или } x \in (2; 5).$$

Ответ: (2; 5).

**526а)** Запишем ОДЗ неравенства  $\log_{0,5} x > \log_2(3 - 2x)$ , которая определяется условиями:  $x > 0$  и  $3 - 2x > 0$ , откуда  $0 < x < \frac{3}{2}$ .

В данном неравенстве в логарифме перейдем к основанию 2. Име-

ем:  $\frac{\log_2 x}{\log_2 0,5} > \log_2(3 - 2x)$  или  $\frac{\log_2 x}{-1} > \log_2(3 - 2x)$  или  $0 > \log_2 x + \log_2(3 - 2x)$  или  $\log_2 1 > \log_2[x(3 - 2x)]$ . Так как основание логарифмов 2 больше единицы (логарифмическая функция возрастающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством того же знака:  $1 > x(3 - 2x)$  или  $2x^2 - 3x + 1 > 0$ . Решение этого квадратного неравенства:  $x < \frac{1}{2}$  и  $x > 1$ . С учетом ОДЗ полу-

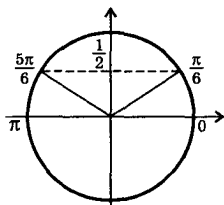
чаем решение данного неравенства:  $0 < x < \frac{1}{2}$  и  $1 < x < \frac{3}{2}$  или

$$x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right). \quad \text{Ответ: } \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right).$$

**527а)** Для решения неравенства  $\log_2^2 x - \log_2 x \leq 6$  введем новую неизвестную  $y = \log_2 x$ . Получаем квадратное неравенство  $y^2 - y \leq 6$  или  $y^2 - y - 6 \leq 0$ . Решение этого неравенства  $-2 \leq y \leq 3$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ , числа  $(-2)$  и  $3$  представим в виде логарифмов с основанием 2. Получаем:  $-2 \leq \log_2 x \leq 3$  или  $\log_2 2^{-2} \leq \log_2 x \leq \log_2 2^3$  или  $\log_2 \frac{1}{4} \leq \log_2 x \leq \log_2 8$ . Так как основание логарифмов 2 больше единицы (логарифмическая функция возрастающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством того же знака:  $\frac{1}{4} \leq x \leq 8$  или  $x \in \left[\frac{1}{4}; 8\right]$ . Ответ:  $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$ .

**528а)** ОДЗ неравенства  $\log_2 \sin \frac{x}{2} < -1$  определяется условием  $\sin \frac{x}{2} > 0$  (логарифмируемая величина должна быть положительной). Данное неравенство запишем в виде:  $\log_2 \sin \frac{x}{2} < \log_2 2^{-1}$  или

$\log_2 \sin \frac{x}{2} < \log_2 \frac{1}{2}$ . Так как основание логарифмов 2 больше единицы (логарифмическая функция возрастающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством того же знака:  $\sin \frac{x}{2} < \frac{1}{2}$ . Таким образом, данное неравенство свелось к тригонометрическому



му неравенству  $0 < \sin \frac{x}{2} < \frac{1}{2}$ .

Для решения этого неравенства введем неизвестную  $t = \frac{x}{2}$  и решим неравенство  $0 < \sin t < \frac{1}{2}$  с помощью тригонометрического круга. На промежутке  $[0; 2\pi]$  неравенство выполняется при  $0 < t < \frac{\pi}{6}$  и  $\frac{5\pi}{6} < t < \pi$ . Функция  $\sin t$  периодична с периодом  $2\pi$ . Учитывая периодичность, получаем решение неравенства:  $2\pi n < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$  и  $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < \pi + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$  и получим двойные линейные неравенства  $2\pi n < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$  и  $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < \frac{x}{2} < \pi + 2\pi n$ . Все части каждого неравенства умножим на положительное число 2. При этом знаки неравенств сохраняются:  $4\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 4\pi n$  и  $\frac{5\pi}{3} + 4\pi n < x < 2\pi + 4\pi n$ .

**Ответ:**  $\left(4\pi n; \frac{\pi}{3} + 4\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3} + 4\pi n; 2\pi + 4\pi n\right)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**5286)** Неравенство  $|3 - \log_2 x| < 2$  эквивалентно двойному неравенству  $-2 < 3 - \log_2 x < 2$ . Из всех частей неравенства вычтем число 3:  $-5 < -\log_2 x < -1$ . Умножим все части на отрицательное число  $(-1)$ . При этом знаки неравенства меняются на противоположные:  $5 > \log_2 x > 1$ . Запишем неравенство в виде:  $\log_2 2 < \log_2 x < \log_2 2^5$  или  $\log_2 2 < \log_2 x < \log_2 32$ . Так как основание логарифмов 2 больше единицы (логарифмическая функция возрастающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством того же знака:  $2 < x < 32$  или  $x \in (2; 32)$ . **Ответ:**  $(2; 32)$ .

**529а)** Используя определение логарифма, систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = 2 \\ \log_3(x-y) = 2 \end{cases} \text{ запишем в виде } \begin{cases} \log_3(x+y) = \log_3\left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ \log_3(x-y) = \log_3 3^2 \end{cases}, \text{ откуда}$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{9} \\ x - y = 9 \end{cases}$$
 Для решения этой системы линейных уравнений сначала сложим уравнения:  $2x = \frac{1}{9} + 9$  или  $2x = \frac{82}{9}$  (откуда  $x = \frac{41}{9} = 4\frac{5}{9}$ ), потом вычтем уравнения:  $y - (-y) = \frac{1}{9} - 9$  или  $2y = -\frac{80}{9}$  (откуда  $y = -\frac{40}{9} = -4\frac{4}{9}$ ). Ответ:  $\left(4\frac{5}{9}; -4\frac{4}{9}\right)$ .

**529г)** Используя свойства логарифмов, преобразуем уравнения

системы 
$$\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 1 + \lg 13 \\ \lg(x + y) = \lg(x - y) + \lg 8 \end{cases}$$
 Получаем

$$\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = \lg 10 + \lg 13 \\ \lg(x + y) = \lg[(x - y) \cdot 8] \end{cases}$$
 или 
$$\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = \lg(10 \cdot 13) \\ \lg(x + y) = \lg(8x - 8y) \end{cases}$$
, откуда

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 130 \\ x + y = 8x - 8y \end{cases}$$
 Из второго уравнения выразим  $y$ :  $y + 8y = 8x - x$ ,

откуда  $y = \frac{7}{9}x$ . Подставим эту величину в первое уравнение:

$$x^2 + \left(\frac{7}{9}x\right)^2 = 130$$
 или  $x^2 + \frac{49}{81}x^2 = 130$  или  $\frac{130}{81}x^2 = 130$ , откуда

$x^2 = 81$  и  $x = \pm 9$ . Теперь найдем  $y = \frac{7}{9}x = \pm 7$ . Очевидно, что решение  $x = -9$   $y = -7$  не подходит, т.к.  $x + y > 0$ . Ответ: (9; 7).

**530а)** Используя свойства степеней и логарифмов, преобразуем

уравнения системы 
$$\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81 \\ \lg(x + y)^2 - \lg x = 2 \lg 3 \end{cases}$$
 Получаем:

$$\begin{cases} 3^y \cdot 3^{2x} = 3^4 \\ \lg \frac{(x + y)^2}{x} = \lg 3^2 \end{cases}$$
 или 
$$\begin{cases} 3^{y+2x} = 3^4 \\ \lg \frac{(x + y)^2}{x} = \lg 9 \end{cases}$$
, откуда 
$$\begin{cases} y + 2x = 4 \\ \frac{(x + y)^2}{x} = 9 \end{cases}$$
. Из

первого уравнения выразим  $y = 4 - 2x$  и подставим во второе уравнение:

$$\frac{(x + 4 - 2x)^2}{x} = 9$$
 или  $(4 - x)^2 = 9x$  или  $16 - 8x + x^2 = 9x$  или  $x^2 - 17x + 16 = 0$ . Корни этого квадратного уравнения  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 16$ . Теперь, используя соотношение  $y = 4 - 2x$ , найдем:  $y_1 = 4 - 2 \cdot 1 = 2$  и  $y_2 = 4 - 2 \cdot 16 = -28$ .

Ответ: (1; 2), (16; -28).

**5306)** Для решения системы 
$$\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50 \\ \lg(x+y) + \lg(x-y) = 2 - \lg 5 \end{cases}$$
 ис-

пользуем свойства логарифмов. Обе части первого уравнения прологарифмируем по основанию 10. Получаем:

$$\begin{cases} \lg 10^{1+\lg(x+y)} = \lg 50 \\ \lg(x+y) + \lg(x-y) = \lg 10^2 - \lg 5 \end{cases}$$

или 
$$\begin{cases} 1 + \lg(x+y) = \lg 50 \\ \lg(x+y) + \lg(x-y) = \lg \frac{100}{5} \end{cases}$$

или 
$$\begin{cases} \lg(x+y) = \lg 50 - \lg 10 \\ \lg(x+y) + \lg(x-y) = \lg 20 \end{cases}$$

или 
$$\begin{cases} \lg(x+y) = \lg \frac{50}{10} \\ \lg(x+y) + \lg(x-y) = \lg 20 \end{cases}$$

или 
$$\begin{cases} \lg(x+y) = \lg 5 \\ \lg(x+y) + \lg(x-y) = \lg 20 \end{cases}$$
 Подставим первое уравнение во

второе:  $\lg 5 + \lg(x-y) = \lg 20$ , откуда  $\lg(x-y) = \lg 20 - \lg 5 = \lg \frac{20}{5} =$

$= \lg 4$ . Получили систему уравнений 
$$\begin{cases} \lg(x+y) = \lg 5 \\ \lg(x+y) = \lg 4 \end{cases}$$
 откуда

$$\begin{cases} x+y = 5 \\ x-y = 4 \end{cases}$$
 Сложим уравнения системы:  $2x = 9$ , тогда  $x = 4,5$ . Выч-

тем уравнения системы:  $y - (-y) = 1$  или  $2y = 1$ , откуда  $y = 0,5$ .

Ответ: (4,5; 0,5).

**531a)** Для функции  $f(x) = 2x + 1$  найдем производную  $f'(x) = 2 > 0$ . Поэтому функция  $f(x)$  возрастающая и, следовательно, имеет обратную функцию. Из равенства  $y = 2x + 1$  найдем  $x = \frac{y-1}{2}$ .

Введем обычные обозначения: аргумент функции обозначим буквой  $x$  и саму функцию — символом  $g(x)$ . Таким образом, функция

$g(x) = \frac{x-1}{2}$  является обратной к функции  $f(x) = 2x + 1$ . Очевидно,

$D(g) = E(g) = R$ . Ответ:  $g(x) = \frac{x-1}{2}$ ;  $D(g) = E(g) = R$ .

**532в)** Найдем производную функции  $f(x) = \frac{x}{x+2}$ . Получаем:

$$f'(x) = \frac{(x)'(x+2) - x \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{1 \cdot (x+2) - x \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2} > 0. \quad \text{Так как}$$

производная положительная, то функция  $f(x)$  возрастает. Поэтому

функция  $f(x)$  имеет обратную. Найдем ее. Из равенства  $y = \frac{x}{x+2}$  выразим  $x$ . Имеем:  $yx + 2y = x$  или  $2y = x - xy$  или  $2y = x(1 - y)$ ,

откуда  $x = \frac{2y}{1-y}$ . Введем принятые обозначения: аргумент функции обозначим буквой  $x$  и саму функцию — символом  $g(x)$ . Та-

ким образом, функция  $g(x) = \frac{2x}{1-x}$  является обратной к функции

$f(x) = \frac{x}{x+2}$ . Области определения и значений для функций  $f(x)$  и  $g(x)$  меняются местами:  $D(g) = E(f)$  и  $E(g) = D(f)$ . Поэтому для функции  $g(x)$ :  $D(g) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$  и  $E(g) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$ .

Ответ:  $g(x) = \frac{2x}{1-x}$ ;  $D(g) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$  и  $E(g) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$ .

**532г)** Найдем производную функции  $f(x) = \sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}}$ .

Получаем:  $f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$ . Так как производная

положительная, то функция  $f(x)$  возрастает. Поэтому функция  $f(x)$

имеет обратную. Найдем ее. Из равенства  $y = \sqrt{x+1}$  выразим  $x$ .

Имеем:  $y^2 = x+1$ , откуда  $x = y^2 - 1$ . Введем принятые обозначения:

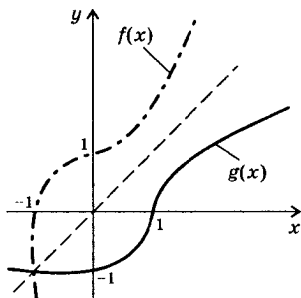
аргумент функции обозначим буквой  $x$  и саму функцию — символом  $g(x)$ . Таким образом, функция  $g(x) = x^2 - 1$  является обратной

к функции  $f(x) = \sqrt{x+1}$ . Области определения и значений для функций  $f(x)$  и  $g(x)$  меняются местами:  $D(g) = E(f)$  и  $E(g) = D(f)$ . Поэтому для функции  $g(x)$ :  $D(g) = [0; \infty)$

и  $E(g) = [-1; \infty)$ .

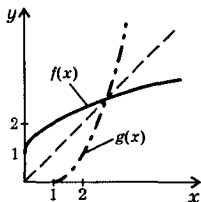
Ответ:  $g(x) = x^2 - 1$ ;  $D(g) = [0; \infty)$ ,  $E(g) = [-1; \infty)$ .

**533а)** Построим сначала график функции  $f(x) = 2x^3 + 1$ . Этот график получается из графика функции  $y = 2x^3$  его смещением на одну единицу вверх вдоль оси ординат. По свойству обратных функций график обратной функции  $g(x)$  симметричен графику функции  $f(x)$



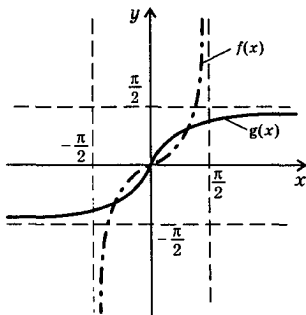
относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Ответ: см. график.



**533г)** Построим сначала график функции  $f(x) = (x-1)^2$  на промежутке  $x \in [1; \infty)$ . По свойству обратных функций график обратной функции  $g(x)$  симметричен графику функции  $f(x)$  относительно биссектрисы первого координатного угла.

Ответ: см. график.



**536б)** Найдем производную функции  $f(x) = \operatorname{tg} x$  на промежутке  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ . Получаем  $f'(x) =$

$= \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ . Так как производная  $f'(x)$  положительна, то функция  $f(x)$  возрастает. Поэтому функция  $f(x) = \operatorname{tg} x$  имеет обратную функцию  $g(x) = \operatorname{arctg} x$ . По свойству обратных функций график обратной функции  $g(x)$  симметричен графику функции  $f(x)$  относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Ответ: см. решение

### § 11. Производная показательной и логарифмической функций

**538а)** Учтем правило нахождения производной от суммы функций. Для функции  $y = 4e^x + 5$  найдем производную:  $y' = (4e^x + 5)' = (4e^x)' + (5)' = 4(e^x)' + 0 = 4e^x$ . Ответ:  $4e^x$ .

**538г)** Используем правило нахождения производной для разности функций. Для функции  $y = 5e^{-x} - x^2$  найдем производную:  $y' = (5e^{-x} - x^2)' = (5e^{-x})' - (x^2)' = 5(e^{-x})' - 2x = 5e^{-x} \cdot (-x)' - 2x = 5e^{-x} \cdot (-1) - 2x = -5e^{-x} - 2x$ . Ответ:  $-5e^{-x} - 2x$ .

**539а)** Учтем правило нахождения производной от произведения функций. Для функции  $y = e^x \cos x$  найдем производную:  $y' = (e^x \cos x)' = (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' = e^x \cos x + e^x (-\sin x) = e^x (\cos x - \sin x)$ . Ответ:  $e^x (\cos x - \sin x)$ .

**539б)** Используем правила нахождения производных. Для функции  $y = 3e^x + 2^x$  найдем производную:  $y' = (3e^x + 2^x)' = (3e^x)' + (2^x)' = 3(e^x)' + 2^x \ln 2 = 3e^x + 2^x \ln 2$ . Ответ:  $3e^x + 2^x \ln 2$ .

**5406)** Напомним уравнение касательной:  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ , где  $x_0$  — точка касания. Для функции  $f(x) = 3^x$  найдем производную  $f'(x) = 3^x \ln 3$ . Вычислим значения производной и функции в точке касания  $x_0 = 1$ :  $f'(x_0) = 3 \ln 3$  и  $f(x_0) = 3$ . Тогда касательная имеет вид:  $y = 3 \ln 3 (x - 1) + 3$  или  $y = 3 \ln 3 \cdot x - 3 \ln 3 + 3$  или  $y = x \cdot 3 \ln 3 + (3 - 3 \ln 3)$ . Ответ:  $y = x \cdot 3 \ln 3 + (3 - 3 \ln 3)$ .

**5416)** Учитывая правила нахождения первообразных, для функции  $f(x) = 2 \cdot 3^x$  найдем первообразную  $F(x) = \frac{2 \cdot 3^x}{\ln 3} + c$ .

Ответ:  $\frac{2 \cdot 3^x}{\ln 3} + c$ .

**542а)** Вычислим интеграл

$$\int_0^1 0,5^x dx = \left. \frac{0,5^x}{\ln 0,5} \right|_0^1 = \frac{0,5^1 - 0,5^0}{\ln 0,5} = \frac{0,5 - 1}{\ln \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\ln 2} = \frac{1}{2 \ln 2}.$$

Ответ:  $\frac{1}{2 \ln 2}$ .

**543а)** Используем правило нахождения производной от произведения функций. Для функции  $y = e^{x^2} \sin \frac{x}{2}$  найдем производную:

$$y' = \left( e^{x^2} \sin \frac{x}{2} \right)' = \left( e^{x^2} \right)' \sin \frac{x}{2} + e^{x^2} \left( \sin \frac{x}{2} \right)' = e^{x^2} (x^2)' \cdot \sin \frac{x}{2} + e^{x^2} \cos \frac{x}{2} \times \\ \times \left( \frac{x}{2} \right)' = e^{x^2} \cdot 2x \cdot \sin \frac{x}{2} + e^{x^2} \cos \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = e^{x^2} \left( 2x \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \right).$$

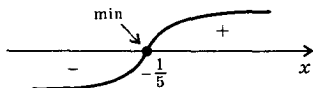
Ответ:  $e^{x^2} \left( 2x \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \right)$ .

**544а)** Учтем правило нахождения производной от частного двух функций. Для функции  $y = \frac{x^6}{4^x + 5}$  найдем производную:

$$y' = \frac{(x^6)'(4^x + 5) - x^6(4^x + 5)'}{(4^x + 5)^2} = \frac{6x^5(4^x + 5) - x^6 \cdot 4^x \ln 4}{(4^x + 5)^2} = \\ = \frac{x^5(6 \cdot 4^x + 30 - x \cdot 4^x \ln 4)}{(4^x + 5)^2}.$$

Ответ:  $\frac{x^5(6 \cdot 4^x + 30 - x \cdot 4^x \ln 4)}{(4^x + 5)^2}$ .

**545а)** Найдем производную функции  $f(x) = xe^{5x}$ . Получаем  $f'(x) = (xe^{5x})' = (x)'e^{5x} + x(e^{5x})' = 1 \cdot e^{5x} + xe^{5x} \cdot 5 = e^{5x}(1 + 5x)$ . Так как при всех значениях  $x$  величина  $e^{5x} > 0$ , то функция имеет единственную критическую точку  $x = -\frac{1}{5}$ . На рисунке приведена диаграмма знаков производной  $f'(x)$ . Так как при проходе через критичес-



кую точку знак производной меняется с минуса на плюс, то точка

$$x = -\frac{1}{5} \text{ — точка минимума и } f_{\min} = \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{5} e^{5(-\frac{1}{5})} = -\frac{1}{5} e^{-1} = -\frac{1}{5e}.$$

Ответ: промежуток убывания  $\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right]$ , промежуток возрастания  $\left[-\frac{1}{5}; \infty\right)$ ;  $x_{\min} = -\frac{1}{5}$ ,  $f_{\min} = -\frac{1}{5e}$ .

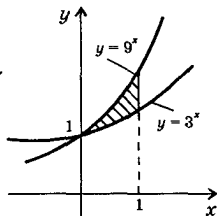
**546а)** Так как первообразная функции  $f(x) = e^x$ , то первообразная функции  $f(x) = e^{3-2x}$  равна  $F(x) = \frac{e^{3-2x}}{-2} + c = -\frac{1}{2} e^{3-2x} + c$ .

Ответ:  $-\frac{1}{2} e^{3-2x} + c$ .

**546б)** Учитывая правила нахождения первообразных, для функции  $f(x) = 2 \cdot 0,9^x - 5,6^{-x}$  получаем  $F(x) = 2 \frac{0,9^x}{\ln 0,9} - \frac{5,6^{-x}}{(-1) \ln 5,6} + c =$

$$= \frac{2 \cdot 0,9^x}{\ln 0,9} + \frac{5,6^{-x}}{\ln 5,6} + c. \quad \text{Ответ: } \frac{2 \cdot 0,9^x}{\ln 0,9} + \frac{5,6^{-x}}{\ln 5,6} + c.$$

**547б)** Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 3^x$ ,  $y = 9^x$  и  $x = 1$ . На рисунке изображена эта фигура. Ее площадь



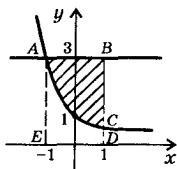
$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (9^x - 3^x) dx = \left( \frac{9^x}{\ln 9} - \frac{3^x}{\ln 3} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \left( \frac{9}{\ln 9} - \frac{3}{\ln 3} \right) - \left( \frac{1}{\ln 9} - \frac{1}{\ln 3} \right) = \\ &= \left( \frac{9}{\ln 9} - \frac{1}{\ln 9} \right) - \left( \frac{3}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} \right) = \frac{8}{\ln 9} - \\ &- \frac{2}{\ln 3} = \frac{8}{2 \ln 3} - \frac{2}{\ln 3} = \frac{4}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{2}{\ln 3}$ .

**548а)** Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ,

$y = 3$  и  $x = 1$ . На рисунке изображена эта фигура  $ABC$ . Площадь этой фигуры

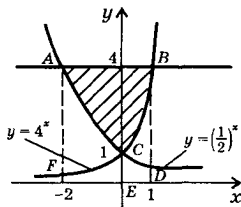
$$\begin{aligned}
 S_{ABC} &= S_{ABDE} - S_{ACDE} = 3 \cdot 2 - \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \\
 &= 6 - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln \frac{1}{3}} \bigg|_{-1}^1 = 6 + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln 3} \bigg|_{-1}^1 = 6 + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}{\ln 3} = \\
 &= 6 + \frac{1 - 3}{\ln 3} = 6 - \frac{8}{3 \ln 3}. \quad \text{Ответ: } 6 - \frac{8}{3 \ln 3}.
 \end{aligned}$$



**548г)** Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ,  $y = 4^x$  и  $y = 4$ . Эта фигура изображена на рисунке. Найдем абсциссу точки пересечения прямой  $y = 4$  и зависимости  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ . Получаем уравнение:  $4 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  или  $4 = 2^{-x}$ , откуда  $x = -2$ . Аналогично находим точку пересечения линий  $y = 4$  и  $y = 4^x$ . Получаем  $x = 1$ .

Площадь данной фигуры  $ABC$ :

$$\begin{aligned}
 S_{ABC} &= S_{ABDF} - S_{ACEF} - S_{BDEC} = \\
 &= 4 \cdot 3 - \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln x - \int_0^1 4^x \ln x = 12 - \\
 &- \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln \frac{1}{2}} \bigg|_{-2}^0 - \frac{4^x}{\ln 4} \bigg|_0^1 = 12 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln 2} \bigg|_{-2}^0 - \frac{4^x}{2 \ln 2} \bigg|_0^1 = \\
 &= 12 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}{\ln 2} - \frac{4^1 - 4^0}{2 \ln 2} = 12 + \frac{1 - 4}{\ln 2} - \frac{4 - 1}{2 \ln 2} = 12 - \frac{3}{\ln 2} - \frac{3}{2 \ln 2} = \\
 &= 12 - \frac{3 \cdot 2 + 3}{2 \ln 2} = 12 - \frac{9}{2 \ln 2}. \quad \text{Ответ: } 12 - \frac{9}{2 \ln 2}.
 \end{aligned}$$



**549а)** Используем правило нахождения производной сложной функции. Для функции  $y = \ln(2 + 3x)$  получаем:  $y' = \frac{1}{2 + 3x} \cdot (2 + 3x)' =$   
 $= \frac{1}{2 + 3x} \cdot 3 = \frac{3}{3x + 2}$ . Ответ:  $\frac{3}{3x + 2}$ .

**549б)** Учтем правило нахождения производной от суммы функций. Для функции  $y = \log_{0.3} x + \sin x$  получаем:  $y' = (\log_{0.3} x + \sin x)' =$

$$= (\log_{0,3} x)' + (\sin x)' = \left( \frac{\ln x}{\ln 0,3} \right)' + \cos x = \frac{1}{x \ln 0,3} + \cos x.$$

Ответ:  $\frac{1}{x \ln 0,3} + \cos x.$

**550а)** Учтем правило нахождения производной для произведения функций. Для функции  $y = x^2 \log_2 x$  получаем:  $y' = (x^2 \log_2 x)' = (x^2)' \log_2 x + x^2 (\log_2 x)' = 2x \log_2 x + x^2 \left( \frac{\ln x}{\ln 2} \right)' = 2x \log_2 x + x^2 \cdot \frac{1}{x \ln 2} = 2x \log_2 x + \frac{x}{\ln 2}.$  Ответ:  $2x \log_2 x + \frac{x}{\ln 2}.$

**550б)** Для функции  $y = \frac{\ln x}{x}$  учтем правило нахождения производной для частного двух функций. Получаем:  $y' = \left( \frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$  Ответ:  $\frac{1 - \ln x}{x^2}.$

**551а)** Учтем правило нахождения первообразных. Так как первообразная функции  $\frac{1}{x}$  есть функция  $\ln |x|$ , то первообразная функции  $\frac{1}{7x+1}$  есть функция  $\frac{\ln |7x+1|}{7}$ . Поэтому первообразной функции  $f(x) = \frac{3}{7x+1}$  является функция  $F(x) = \frac{3 \ln |7x+1|}{7} + c.$  Ответ:  $\frac{3 \ln |7x+1|}{7} + c.$

**551б)** Учтем правило нахождения для разности функций. Тогда первообразной функции  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+5}$  является функция  $F(x) = \ln |x| - 2 \ln |x+5| + c.$  Ответ:  $\ln |x| - 2 \ln |x+5| + c.$

**552а)** Напомним уравнение касательной  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ , где  $x_0$  — точка касания. Для функции  $f(x) = \ln(x+1)$  найдем производную  $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ . Вычислим значения производной  $f'(x)$  и функции  $f(x)$  в точке касания  $x_0 = 0$ :  $f'(x_0) = \frac{1}{0+1} = 1$  и  $f(x_0) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$ . Тогда уравнение касательной:  $y = 1 \cdot (x - 0) + 0$  или  $y = x.$  Ответ:  $y = x.$

**553г)** Используя правила нахождения первообразных, вычислим интеграл:

$$\int_0^3 \frac{dx}{3x+1} = \frac{\ln|3x+1|}{3} \Big|_0^3 = \frac{\ln|3 \cdot 3 + 1|}{3} - \frac{\ln|3 \cdot 0 + 1|}{3} = \frac{\ln 10}{3} - \frac{\ln 1}{3} = \frac{1}{3} \ln 10.$$

**Ответ:**  $\frac{1}{3} \ln 10$ .

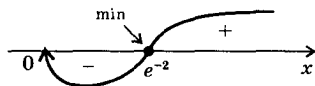
**554а)** Учтем правило нахождения производной для частного двух функций и для сложной функции. Для функции  $y = \frac{\ln(5+3x)}{x^2+1}$

$$\begin{aligned} \text{получаем: } y' &= \frac{(\ln(5+3x))' \cdot (x^2+1) - \ln(5+3x) \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{5+3x} \cdot (5+3x)' \cdot (x^2+1) - \ln(5+3x) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{\frac{3(x^2+1)}{5+3x} - 2x \ln(5+3x)}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{3(x^2+1) - 2x(5+3x) \ln(5+3x)}{(5+3x)(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{3(x^2+1) - 2x(5+3x) \ln(5+3x)}{(5+3x)(x^2+1)^2}$ .

**555а)** Найдем производную функции  $f(x) = \sqrt{x} \ln x = x^{\frac{1}{2}} \ln x$ . Получаем:  $f'(x) = (x^{\frac{1}{2}} \ln x)' = (x^{\frac{1}{2}})' \ln x + x^{\frac{1}{2}} (\ln x)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \ln x + x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$ . Критическая точка функции определяется уравнением:  $\ln x + 2 = 0$  или  $\ln x = -2$ , откуда  $x = e^{-2}$ . В выражении для производной знаменатель  $2\sqrt{x} > 0$ , поэтому знак производной определяется числителем  $\ln x + 2$ .

На рисунке приведена диаграмма знаков производной  $f'(x)$ . Видно, что  $(0; e^{-2}]$  — промежуток убывания,  $[e^{-2}; \infty)$  — промежуток возрастания.

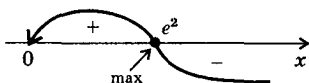


Точка  $x = e^{-2}$  — точка минимума и  $f_{\min} = f(e^{-2}) = \sqrt{e^{-2}} \ln e^{-2} = e^{-1} \cdot (-2) = -\frac{2}{e}$ . **Ответ:**  $(0; e^{-2}]$  — промежуток убывания,  $[e^{-2}; \infty)$  — промежуток возрастания;  $x_{\min} = e^{-2}$ ,  $f_{\min} = -\frac{2}{e}$ .

**556в)** Найдем производную функции  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ . Получаем:  $f'(x) =$

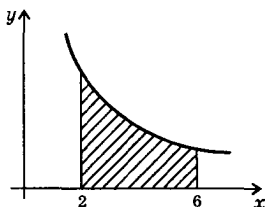
$$= \left( \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{(\ln x)' \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}.$$

Критическая точка функции определяется уравнением:  $2 - \ln x = 0$  или  $\ln x = 2$ , откуда  $x = e^2$ . В выражении для производной знаменатель  $2x\sqrt{x} > 0$ , поэтому знак производной определяется числителем  $2 - \ln x$ . На рисунке приведена диаграмма знаков производной  $f'(x)$ .



Видно, что  $(0; e^2]$  — промежуток возрастания,  $[e^2; \infty)$  — промежуток убывания. Точка  $x = e^2$  — точка максимума и  $f_{\max} = f(e^2) = \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e}$ .

Ответ:  $(0; e^2]$  — промежуток возрастания,  $[e^2; \infty)$  — промежуток убывания;  $x_{\max} = e^2$ ,  $f_{\max} = \frac{2}{e}$ .



**557а)** Найдем площадь фигуры,

ограниченной линиями  $y = \frac{4}{x} + 2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$  и  $x = 6$ . Эта фигура изображена на рисунке. Площадь этой фигуры

$$S = \int_2^6 \left( \frac{4}{x} + 2 \right) dx = (4 \ln |x| + 2x) \Big|_2^6 =$$

$$= (4 \ln 6 + 12) - (4 \ln 2 + 4) = 4(\ln 6 - \ln 2) + 8 = 4 \ln \frac{6}{2} + 8 = 4 \ln 3 + 8.$$

Ответ:  $4 \ln 3 + 8$ .

**560а)** Для вычисления числа  $24^{\frac{1}{3}}$  найдем ближайшее к числу 24 число, которое является кубом целого числа, т.е.  $24 = 27 - 3 = 27 \left( 1 - \frac{3}{9} \right) = 27 \left( 1 - \frac{1}{3} \right)$ . Тогда получаем:  $24^{\frac{1}{3}} = \left( 27 \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} \cdot \left( 1 - \frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot \left( 1 - \frac{1}{3 \cdot 3} \right) = 3 - \frac{1}{3} = 2 \frac{2}{3}$ . Ответ:  $2 \frac{2}{3}$ .

**560б)** Используем правила действий со степенями. Получаем:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{625 \cdot 3} &= \sqrt[4]{625 \cdot 16 \cdot \frac{3}{16}} = \sqrt[4]{625 \cdot 16} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{16}} = 5 \cdot 2 \sqrt[4]{1 - \frac{13}{16}} \approx \\ &\approx 10 \cdot \left( 1 - \frac{13}{16 \cdot 4} \right) = 10 \cdot \left( 1 - \frac{13}{64} \right) = 10 \cdot \frac{51}{64} = \frac{5 \cdot 51}{32} = \frac{255}{32} = 7 \frac{31}{32}. \end{aligned}$$

Ответ:  $7 \frac{31}{32}$ .

**561в)** Используем свойства корней. Тогда получаем:

$$\sqrt{9,02} = \sqrt{9 + \frac{1}{50}} = \sqrt{9 \cdot \left( 1 + \frac{1}{450} \right)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{450}} \approx 3 \cdot \left( 1 + \frac{1}{450 \cdot 2} \right) =$$

$$= 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{900}\right) = 3 + \frac{1}{300} = 3 \frac{1}{300}. \quad \text{Ответ: } 3 \frac{1}{300}.$$

**5626)** Найдем производную степенной функции  $f(x) = x^{-\frac{4}{3}}$ . Получаем  $f'(x) = -\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}}$ . Видно, что в области определения функции  $f(x)$   $x \in (0; \infty)$  производная  $f'(x) < 0$ . Поэтому функция  $f(x)$  убывает. Тогда на промежутке  $I = \left[\frac{1}{8}; 27\right]$  наибольшее значение достигается на левой границе промежутка при  $x = \frac{1}{8}$  и равно  $f\left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = (2^{-3})^{-\frac{4}{3}} = 2^4 = 16$ . Наименьшее значение достигается на правой границе промежутка при  $x = 27$  и равно  $f(27) = 27^{-\frac{4}{3}} = (3^3)^{-\frac{4}{3}} = 3^{-4} = \frac{1}{81}$ .

Ответ: 16;  $\frac{1}{81}$ .

**5636)** Найдем первообразную степенной функции  $f(x) = x^{2\sqrt{3}}$ .

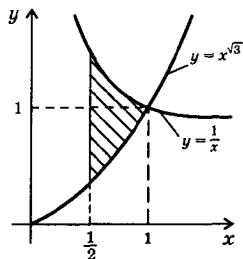
$$\begin{aligned} \text{Получаем: } F(x) &= \frac{x^{2\sqrt{3}+1}}{2\sqrt{3}+1} + c = \frac{x^{2\sqrt{3}+1}(2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-1)} + c = \frac{x^{2\sqrt{3}+1}(2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3})^2 - 1} + c = \\ &= \frac{2\sqrt{3}-1}{11} x^{2\sqrt{3}+1} + c. \quad \text{Ответ: } \frac{2\sqrt{3}-1}{11} x^{2\sqrt{3}+1} + c. \end{aligned}$$

**5646)** Вычислим интеграл, используя правила нахождения первообразных. Получаем:

$$\begin{aligned} \int_1^8 \frac{4dx}{x^{\frac{2}{3}}} &= 4 \int_1^8 x^{-\frac{2}{3}} dx = 4 \left. \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right|_1^8 = 12x^{\frac{1}{3}} \Big|_1^8 = \\ &= 12 \left( 8^{\frac{1}{3}} - 1^{\frac{1}{3}} \right) = 12(2 - 1) = 12. \quad \text{Ответ: } 12. \end{aligned}$$

**5656)** Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^{\sqrt{3}}$ ,  $y = \frac{1}{x}$  и  $x = \frac{1}{2}$ . Эта фигура изображена на рисунке. Очевидно, что графики функций пересекаются при  $x = 1$ . Поэтому площадь фигуры

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \frac{1}{x} - x^{\sqrt{3}} \right) dx = \left( \ln|x| - \frac{x^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 =$$



$$\begin{aligned}
&= \left( \ln x - \frac{x^{\sqrt{3}+1}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \right) \Big|_1^1 = \left( \ln x - \frac{\sqrt{3}-1}{2} x^{\sqrt{3}+1} \right) \Big|_1^1 = \left( \ln 1 - \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot 1^{\sqrt{3}+1} \right) - \\
&- \left( \ln \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{\sqrt{3}+1} \right) = \left( 0 - \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) - \left( -\ln 2 - \frac{\sqrt{3}-1}{2^{\sqrt{3}+2}} \right) = \ln 2 + \\
&+ \frac{\sqrt{3}-1}{4 \cdot 2^{\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \quad \text{Ответ: } \ln 2 - \frac{\sqrt{3}-1}{4 \cdot 2^{\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}.
\end{aligned}$$

**5686)** Проверим, что функция  $y(t) = 4\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$  является решением дифференциального уравнения  $y'' = -\frac{1}{4}y$ . Сначала найдем первую производную  $y' = 4\cos\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)' = 4\cos\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right) \times \frac{1}{2} = 2\cos\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$ . Теперь найдем вторую производную  $y'' = (y')' = \left(2\cos\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)\right)' = 2\left(-\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)' = -2\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$ . Найдем функцию  $-\frac{1}{4}y = -\frac{1}{4} \cdot 4\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$ . Видно, что  $y'' = -\frac{1}{4}y = -\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$ .

Ответ: доказано.

**570)** Докажем, что функция  $y = 7e^{-2x}$  удовлетворяет уравнению  $y' = -2y$ . Найдем  $y' = (7e^{-2x})' = 7(e^{-2x})' = 7e^{-2x} \cdot (-2x)' = 7e^{-2x} \cdot (-2) = y \cdot (-2)$ . Таким образом, видно, что  $y' = -2y$ . Ответ: доказано.

**572а)** Известно, что гармонические колебания описываются дифференциальным уравнением  $f''(t) = -\omega^2 f(t)$ . Его решением является функция  $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ . По условию дано уравнение  $y'' = -25y$  или  $y'' = -5^2 y$ . Тогда из сопоставления с гармоническими колебаниями сразу можно записать решение:  $y(t) = A\cos(5t + \varphi)$ . В частности, можно выбрать  $A = 10$  и  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ . Тогда решение имеет

$$\text{вид: } y(t) = 10\cos\left(5t + \frac{\pi}{6}\right). \quad \text{Ответ: } 10\cos\left(5t + \frac{\pi}{6}\right).$$

**575)** Радиоактивный распад вещества описывается соотношением  $m(t) = m_0 e^{-kt}$ , где  $m(t)$  — количество вещества в момент времени  $t$ ,  $m_0$  — первоначальное количество вещества,  $k$  — величина,

связанная с периодом  $T$  полураспада  $\left(k = \frac{\ln 2}{T}\right)$ . По условию задачи  $m(t) = n$ ,  $m_0 = m$ . Поэтому имеем соотношение  $n = me^{-kt}$ . Прологарифмируем обе части этого равенства по основанию  $e$ . Получаем:  $\ln n = \ln(me^{-kt})$  или  $\ln n = \ln m + \ln e^{-kt}$  или  $\ln n = \ln m - kt$  или  $kt = \ln m - \ln n$  или  $\frac{\ln 2}{T} t = \ln m - \ln n$ , откуда  $T = \frac{t \ln 2}{\ln m - \ln n}$ .

Ответ:  $\frac{t \ln 2}{\ln m - \ln n}$ .

## Глава V. ЗАДАЧИ НА ПОВТОРЕНИЕ

### § 1. Действительные числа

2) Три последовательных натуральных числа можно записать в виде  $n$ ,  $n+1$ ,  $n+2$ . Тогда сумма этих чисел  $n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$ . Видно, что это число делится на 3, т.е. сумма трех последовательных натуральных чисел делится на 3. Среди трех последовательных натуральных чисел (например, 26, 27, 28) всегда одно число кратно трем и одно (или два) кратно двум. Поэтому произведение этих чисел делится на 6 (т.к.  $6 = 3 \cdot 2$ ).

Ответ: доказано.

3а) Если к числу 523 дописать цифры  $X$  и  $Y$ , то получится пятизначное число 523XY. Для делимости этого числа на 3 и 5 используем признаки делимости на 3 и 5. Число делится на 5, если последняя цифра числа  $Y$  равна 0 или 5. Число делится на 3, если сумма цифр числа  $5 + 2 + 3 + X + Y = 10 + X + Y$  делится на 3. Рассмотрим два случая.

а) Пусть  $Y = 0$ , тогда сумма цифр числа  $10 + X + Y = 10 + X + 0 = 10 + X$ . Эта сумма делится на 3, если  $X = 2, 5, 8$ . Получаем три числа 52320, 52350, 52380.

б) Пусть  $Y = 5$ , тогда сумма цифр числа  $10 + X + Y = 10 + X + 5 = 15 + X$ . Эта сумма делится на 3, если  $X = 0, 3, 6, 9$ . Получаем четыре числа: 52305, 52335, 52365, 52395.

Ответ: 52320, 52350, 52380, 52305, 52335, 52365, 52395.

5) Пусть первая цифра двузначного числа  $x$ , тогда вторая (по условию) —  $x+2$ . Запишем это число в десятичной системе:  $10x + (x+2) = 11x + 2$ . По условию это число  $30 < 11x + 2 < 40$ . Вычтем из всех частей неравенства число 2 и получим:  $28 < 11x < 38$ . Разделим все части неравенства на положительное число 11. При этом знак неравенства сохраняется:  $\frac{28}{11} < x < \frac{38}{11}$  или  $2\frac{6}{11} < x < 3\frac{5}{11}$ .

В этом промежутке есть только одно целое число  $x = 3$ . Тогда искомое число 35. Ответ: 35.

7) Докажем, что  $|a| = |-a|$ . Рассмотрим два случая.

а) Если  $a \geq 0$ , то  $|a| = a$ . Тогда число  $-a \leq 0$  и  $|-a| = -(-a) = a$ . Получим  $|a| = |-a| = a$ .

б) Если  $a < 0$ , то  $|a| = -a$ . Тогда число  $-a > 0$  и  $|-a| = -a$ . Получим  $|a| = |-a| = -a$ .

Итак, в обоих случаях выполнено равенство  $|a| = |-a|$ .

Ответ: доказано.

8а) Найдем значение выражения

$$\frac{2,75 : 1,1 + 3\frac{1}{3}}{2,5 - 0,4 \cdot (-3\frac{1}{3})} = \frac{2,5 + 3\frac{1}{3}}{2,5 + \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{3}} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{10}{3}}{\frac{5}{2} + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{15+20}{6}}{\frac{15+8}{6}} = \frac{35}{23} = 1\frac{12}{23}.$$

Ответ:  $1\frac{12}{23}$ .

9а) В числителе дроби вынесем за скобки общий множитель 0,5. В знаменателе используем формулу для квадрата суммы чисел. Получаем:

$$\frac{0,5^2 - 0,5}{0,4^2 + 0,1^2 + 2 \cdot 0,4 \cdot 0,1} = \frac{0,5(0,5 - 1)}{(0,4 + 0,1)^2} = \frac{0,5 \cdot (-0,5)}{0,5^2} = -1.$$

Ответ: -1.

13б) Чтобы записать число 0,(66) в виде обыкновенной дроби, можно использовать два способа.

а) Пусть  $x = 0,(66) = 0,66\ldots$  Так как в периоде содержатся две цифры, то найдем число  $100x = 100 \cdot 0,6666\ldots = 66,66\ldots$ . Теперь определим разность:  $100x - x = 66,66\ldots - 0,66\ldots$  или  $99x = 66$ , тогда  $x = \frac{66}{99} = \frac{2}{3}$ .

б) Представим данное число в виде  $0,(66)\ldots = \frac{66}{100} + \frac{66}{10000} + \ldots$ . Видно, что число является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом  $b_1 = \frac{66}{100}$  и знаменателем

$$q = \frac{1}{100}. \text{ Эта сумма } S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{\frac{66}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{66}{100} : \frac{99}{100} = \frac{66}{99} = \frac{2}{3}.$$

Ответ:  $\frac{2}{3}$ .

18а) Для сравнения чисел  $\frac{4}{\lg \frac{1}{2}}$  и  $\frac{7}{\lg \frac{1}{2}}$  найдем их разность:  $\frac{4}{\lg \frac{1}{2}} - \frac{7}{\lg \frac{1}{2}} = \frac{4-7}{\lg \frac{1}{2}} = \frac{-3}{\lg \frac{1}{2}} > 0$ , т.к. числитель (-3) и знаменатель  $\lg \frac{1}{2}$  дроби

би — отрицательные числа. Поэтому  $\frac{4}{\lg \frac{1}{2}} > \frac{7}{\lg \frac{1}{2}}$ .

Ответ:  $\frac{4}{\lg \frac{1}{2}} > \frac{7}{\lg \frac{1}{2}}$ .

186) Сравним числа  $(\sqrt{5} + 2)$  и  $\sqrt{17}$ , т.е.  $\sqrt{5} + 2 \vee \sqrt{17}$ . Возведем в квадрат обе положительные части сравнения:  $5 + 2\sqrt{5} \times \times 2 + 4 \vee 17$  или  $9 + 4\sqrt{5} \vee 17$ . Это сравнение можно записать в виде:  $4\sqrt{5} \vee 17 - 9$  или  $4\sqrt{5} \vee 8$  или  $\sqrt{5} \vee 2$ . Вновь возведем в квадрат обе положительные части сравнения:  $5 \vee 4$ . Очевидно, что справедливо неравенство  $5 > 4$ . Так как все операции обратимы, то  $\sqrt{5} + 2 > \vee \sqrt{17}$ . Ответ:  $\sqrt{5} + 2 > \vee \sqrt{17}$ .

18в) Для сравнения чисел  $\log_3 7$  и  $\log_7 3$  найдем их разность:  $\log_3 7 - \log_7 3 = \log_3 7 - \frac{\log_3 3}{\log_3 7} = \log_3 7 - \frac{1}{\log_3 7} = \frac{\log_3^2 7 - 1}{\log_3 7}$ . Определим знак числителя: так как  $3 < 7 < 9$ , то  $\log_3 3 < \log_3 7 < \log_3 9$  или  $1 < \log_3 7 < 2$ . Поэтому и числитель и знаменатель дроби положительны. Следовательно,  $\log_3 7 - \log_7 3 > 0$ , т.е.  $\log_3 7 > \log_7 3$ .

Ответ:  $\log_3 7 > \log_7 3$ .

19а) Для сравнения чисел запишем их в виде степеней с одинаковым основанием 3:  $15^{\log_3 10} = (3^{\log_3 15})^{\log_3 10} = 3^{\log_3 15 \cdot \log_3 10}$  и  $10^{\log_3 15} = (3^{\log_3 10})^{\log_3 15} = 3^{\log_3 10 \cdot \log_3 15}$ . Видно, что данные числа равны, т.е.  $15^{\log_3 10} = 10^{\log_3 15}$ . Ответ:  $15^{\log_3 10} = 10^{\log_3 15}$ .

196) Сравним данные числа, т.е.  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \vee \sqrt{30} - \sqrt{3}$  или  $\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \vee \sqrt{30}$ . Возведем в квадрат обе положительные части сравнения:  $2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 12 \vee 30$  или  $14 + 4\sqrt{6} \vee 30$  или  $4\sqrt{6} \vee 30 - 14$  или  $4\sqrt{6} \vee 16$  или  $\sqrt{6} \vee 4$ . Вновь возведем в квадрат обе положительные части сравнения:  $6 \vee 16$ . Очевидно, что выполнено неравенство  $6 < 16$ . Так как все операции обратимы, то справедливо и неравенство  $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{30} - \sqrt{3}$ .

Ответ:  $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{30} - \sqrt{3}$ .

19в) Для сравнения чисел  $\sin 2,1$  и  $\sin 7,98$  найдем их разность и преобразуем ее в произведение. Получаем:  $\sin 2,1 - \sin 7,98 = 2\sin \frac{2,1 - 7,98}{2} \cos \frac{2,1 + 7,98}{2} = 2\sin (-2,94) \cos 5,04 = -2\sin 2,94 \cos 5,04$ . Учтем, что  $\pi \approx 3,14$ , и определим знак выражения. Очевидно, что

$\frac{\pi}{2} < 2,94 < \pi$  (вторая четверть) и  $\sin 2,94 > 0$ . Аналогично,  $\frac{3\pi}{2} < 5,04 < 2\pi$  (четвертая четверть) и  $\cos 5,04 > 0$ . Поэтому произведение  $\sin 2,94 \cdot \cos 5,04 > 0$  и разность  $\sin 2,1 - \sin 7,98 < 0$ , т.е.  $\sin 2,1 < \sin 7,98$ . Ответ:  $\sin 2,1 < \sin 7,98$ .

**20а)** Упростим данное числовое выражение. Для этого избавимся от иррациональности в знаменателе дроби, умножив числитель и знаменатель на  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ . Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - 2\sqrt{6} &= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} - 2\sqrt{6} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} - 2\sqrt{6} = \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2}{3 - 2} - 2\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 5. \end{aligned}$$

В результате преобразований получили рациональное число 5.

Ответ: доказано.

**20б)** Упростим данное числовое выражение. Для этого используем формулы сокращенного умножения. Получаем:

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} + 1)^2 + (1 - \sqrt{2})^2 - (\sqrt{7} + 1)(\sqrt{7} - 1) &= 2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1 - 2\sqrt{2} + 2 - \\ - (7 - 1) &= 6 - 6 = 0. \end{aligned}$$

Ответ: доказано.

**22)** Напомним, что  $1\%$  —  $\frac{1}{100}$  величины. Пусть сначала выпуск предприятия составлял  $x$  изделий. Потом выпуск возрос на  $4\%$  (т.е. на  $\frac{x}{100} \cdot 4 = \frac{x}{25}$  изделий) и завод стал выпускать  $x + \frac{x}{25} = \frac{26x}{25}$  изделий. Затем выпуск возрос на  $8\%$  (т.е. на  $\frac{26x}{25 \cdot 100} \cdot 8 = \frac{52x}{625}$  изделий) и завод стал выпускать  $\frac{26x}{25} + \frac{52x}{625} = \frac{702x}{625}$  изделий. За два года выпуск продукции увеличился на  $\frac{702x}{625} - x = \frac{77x}{625}$  изделий, что составляет  $\left(\frac{77x}{625} : x\right) \cdot 100 = \frac{7700}{625} = 12,32\%$ . Поэтому средний ежегодный прирост продукции за двухлетний период равен  $\frac{12,32}{2} = 6,16\%$ . Ответ:  $6,16\%$ .

**24)** Пусть первоначально овощи стоили  $x$  рублей. Потом цена возросла на  $25\%$  (т.е. на  $\frac{x}{100} \cdot 25 = \frac{x}{4}$  рублей) и составила  $x + \frac{x}{4} = \frac{5x}{4}$  рублей. Потом цену снизили на  $\frac{x}{4}$  рублей и она стала вновь

равной  $x$  рублей. Теперь определим, сколько составляет  $\frac{x}{4}$  рублей от стоимости овощей  $\frac{5x}{4}$  рублей. Получаем:  $\left(\frac{x}{4} : \frac{5x}{4}\right) \cdot 100 = 20\%$ . Итак, цену надо снизить на  $20\%$ . Ответ:  $20\%$ .

**25в)** Для пропорции  $\frac{0,13}{x} = \frac{26}{3\frac{1}{3}}$  используем ее свойство:  $0,13 \times 3\frac{1}{3} = x \cdot 26$  или  $0,13 \cdot \frac{10}{3} = x \cdot 26$  или  $\frac{13}{100} \cdot \frac{10}{3} = x \cdot 26$  или  $\frac{13}{30} = x \cdot 26$ , откуда  $x = \frac{13}{30 \cdot 26} = \frac{1}{30 \cdot 2} = \frac{1}{60}$ . Ответ:  $\frac{1}{60}$ .

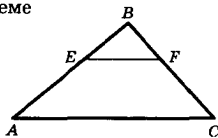
**26а)** Для решения уравнения  $\frac{x-2}{2,5} = \frac{6}{x}$  используем свойство пропорции:  $x(x-2) = 6 \cdot 2,5$  или  $x^2 - 2x = 15$  или  $x^2 - 2x - 15 = 0$ . Корни этого квадратного уравнения  $x_1 = -3$  и  $x_2 = 5$ . Ответ:  $-3; 5$ .

**27а)** По условию задачи  $EF \parallel AC$ . По теореме

Фалеса  $\frac{AE}{AB} = \frac{FC}{BC}$ . Так как  $AB = 22,5$  см,

$AE = 18$  см,  $BC = 15$  см, то получаем:  $\frac{18}{22,5} = \frac{FC}{15}$ . По свойству пропорции имеем:

$18 \cdot 15 = 22,5 \cdot FC$ , откуда  $FC = \frac{18 \cdot 15}{22,5} = 12$  (см). Тогда  $BF = BC - FC = 15 - 12 = 3$  (см). Ответ: 12 см и 3 см.



**28)** Используя формулу  $n$ -го члена арифметической прогрессии  $a_n = a_1 + d(n-1)$ , получаем:  $a_7 = a_1 + 6d$  или  $20 = 2 + 6d$ , откуда  $d = 3$ . Теперь по формуле суммы  $n$  первых членов прогрессии  $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$  находим  $S_{20} = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 19}{2} \cdot 20 = 610$ .

Ответ: 610.

**29)** По условию задачи первый член арифметической прогрессии  $a_1 = 4$  и шестой член  $a_6 = 40$ . Используя формулу  $n$ -го члена прогрессии  $a_n = a_1 + d(n-1)$ , получаем  $40 = 4 + 5d$ , откуда  $d = 7,2$ . Теперь найдем искомые четыре числа:  $a_2 = a_1 + d = 4 + 7,2 = 11,2$ ;  $a_3 = a_2 + d = 11,2 + 7,2 = 18,4$ ;  $a_4 = a_3 + d = 18,4 + 7,2 = 25,6$  и  $a_5 = a_4 + d = 25,6 + 7,2 = 32,8$ . Ответ: 11,2; 18,4; 25,6; 32,8.

**30)** Используем свойство арифметической прогрессии  $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$  (т.е. любой удвоенный член прогрессии равен сумме с ним соседних). Проверим это, найдя сумму первого и третьего членов:  $\frac{1}{\log_3 2} + \frac{1}{\log_{12} 2} = \log_2 3 + \log_2 12 = \log_2 (3 \cdot 12) = \log_2 36 = \log_2 6^2 =$

$= 2\log_2 6 = \frac{2}{\log_6 2}$ . Видим, что эта сумма равна удвоенному второму члену. Поэтому указанные числа являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Ответ: доказано.

31) Запишем все нужные члены прогрессии, используя формулу  $n$ -го члена  $a_n = a_1 + d(n-1)$ . Так как сумма первого и пятого членов равна 26, то получаем уравнение:  $a_1 + (a_1 + 4d) = 26$  или  $2a_1 + 4d = 26$  или  $a_1 + 2d = 13$ . Произведение второго и четвертого членов равно 160. Поэтому имеем уравнение:  $(a_1 + d)(a_1 + 3d) = 160$ . Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 13 \\ (a_1 + d)(a_1 + 3d) = 160 \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим  $a_1 = 13 - 2d$  и подставим во второе:  $(13 - 2d + d)(13 - 2d + 3d) = 160$  или  $(13 - d)(13 + d) = 160$  или  $169 - d^2 = 160$ , откуда  $d^2 = 9$  и  $d = \pm 3$ . Теперь найдем  $a_1$  и сумму первых шести членов  $S_6 = \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = 3(2a_1 + 5d)$ . Рассмотрим два случая.

а)  $d = 3$ , тогда  $a_1 = 13 - 2d = 13 - 2 \cdot 3 = 7$  и  $S_6 = 3 \cdot (2 \cdot 7 + 5 \cdot 3) = 3 \cdot 29 = 87$ .

б)  $d = -3$ , тогда  $a_1 = 13 - 2d = 13 - 2 \cdot (-3) = 19$  и  $S_6 = 3 \cdot (2 \cdot 19 + 5 \cdot (-3)) = 3 \cdot 23 = 69$ .

Ответ: 87 или 69.

32) В данном выражении раскроем скобки и приведем подобные члены:  $(a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 - (a-d)^2 = a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 - a^2 + 2ad - d^2 = 2b^2 + 2c^2 - 2ac - 2bc - 2bd + 2ad$ . Так как числа  $a, b, c, d$  образуют геометрическую прогрессию, то  $b = aq, c = aq^2$  и  $d = aq^3$ . Подставим эти числа в полученное выражение:  $2(aq)^2 + 2(aq^2)^2 - 2aaq^2 - 2aqaq^2 - 2aqaq^3 + 2aaq^3 = 2a^2q^2 + 2a^2q^4 - 2a^2q^2 - 2a^2q^3 - 2a^2q^4 + 2a^2q^3 = 0$ . Ответ: 0.

33) Используем свойство геометрической прогрессии  $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$  (т.к. квадрат любого члена равен произведению членов соседних с ним). Найдем произведение первого и третьего числа:

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) \cdot 2} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(2-1) \cdot 2} = \frac{2+2\sqrt{2}+1}{2} = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}. \quad \text{Теперь}$$

преобразуем второе число, избавившись от иррациональности в

$$\text{знаменателе: } \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{2+\sqrt{2}}{4-2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}. \quad \text{Найдем квадрат}$$

$$\text{этого числа: } \left( \frac{2+\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{(2+\sqrt{2})^2}{2^2} = \frac{4+4\sqrt{2}+2}{4} = \frac{6+4\sqrt{2}}{4} = \frac{2(3+2\sqrt{2})}{4} =$$

$= \frac{3+2\sqrt{2}}{4}$ . Видно, что для данных чисел выполнено свойство геометрической прогрессии. Следовательно, эти числа образуют геометрическую прогрессию. Ответ: доказано.

34) Запишем данные члены геометрической прогрессии, используя формулу  $n$ -го члена  $b_n = b_1 q^{n-1}$ . Известно, что четвертый член больше второго на 24. Получаем уравнение:  $b_1 q^3 - b_1 q = 24$  или  $b_1 q (q^2 - 1) = 24$ . Так как сумма второго и третьего члена равна 6, то имеем уравнение:  $b_1 q + b_1 q^2 = 6$  или  $b_1 q (1 + q) = 6$ . Получили

$$\text{систему уравнений} \begin{cases} b_1 q (q^2 - 1) = 24 \\ b_1 q (q + 1) = 6 \end{cases}.$$

Разделим первое уравнение на второе:  $\frac{b_1 q (q^2 - 1)}{b_1 q (q + 1)} = \frac{24}{6}$  или  $q - 1 = 4$ , откуда  $q = 5$ . Подставим это значение во второе уравнение системы:  $b_1 \cdot 5 (5 + 1) = 6$ , откуда  $b_1 = \frac{1}{5}$ . Таким образом,  $b_1 = \frac{1}{5}$  и  $q = 5$ . Ответ:  $b_1 = \frac{1}{5}$ ,  $q = 5$ .

35) Сначала найдем знаменатель геометрической прогрессии  $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{12}{3} = 4$ . Воспользуемся формулой  $n$ -го члена прогрессии  $b_n = b_1 q^{n-1}$ . Получаем уравнение:  $3072 = 3 \cdot 4^{n-1}$  или  $1024 = 4^{n-1}$  или  $4^5 = 4^{n-1}$ , откуда  $n - 1 = 5$  и  $n = 6$ . Таким образом, прогрессия содержит 6 членов. Ответ: 6.

36) Найдем первый член геометрической прогрессии, используя формулу  $n$ -го члена  $b_n = b_1 q^{n-1}$ . Получаем уравнение:  $\frac{1}{54} = b_1 \left(\frac{1}{3}\right)^3$

или  $\frac{1}{54} = b_1 \frac{1}{27}$ , откуда  $b_1 = \frac{1}{2}$ . Для нахождения количества членов прогрессии используем формулу для суммы  $n$  первых членов  $S_n =$

$$= \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}. \text{ Получаем уравнение: } \frac{121}{162} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3} - 1} \text{ или } \frac{121}{81} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{-\frac{2}{3}}$$

$$\text{или } \frac{121}{81} = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \text{ или } \frac{242}{243} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n, \text{ откуда } \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{243} \text{ или}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \text{ и } n = 5. \text{ Следовательно, прогрессия содержит 5 членов.}$$

Ответ: 5.

**37)** Даны четыре числа  $a, b, c, d$ . Так как первые три составляют геометрическую прогрессию, то  $b = aq$  и  $c = aq^2$ . Последние три числа образуют арифметическую прогрессию, и выполняется свойство этой прогрессии:  $2c = b + d$ , откуда  $d = 2c - b = 2aq^2 - aq$ . По условию сумма крайних чисел равна 14, а сумма средних 12. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a + d = 14 \\ b + c = 12 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a + 2aq^2 - aq = 14 \\ aq + aq^2 = 12 \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} a(1 + 2q^2 - q) = 14 \\ a(q + q^2) = 12 \end{cases} \quad . \quad \text{Разделим первое уравнение на второе:}$$

$$\frac{a(1 + 2q^2 - q)}{a(q + q^2)} = \frac{14}{12} \quad \text{или} \quad \frac{1 + 2q^2 - q}{q + q^2} = \frac{7}{6} \quad \text{или} \quad 6 + 12q^2 - 6q = 7q + 7q^2 \quad \text{или}$$

$$5q^2 - 13q + 6 = 0. \quad \text{Корни этого квадратного уравнения } q = 2 \text{ и } q = \frac{3}{5}.$$

Теперь найдем данные числа. Рассмотрим два случая.

а)  $q = 2$ , тогда из второго уравнения  $a = \frac{12}{q + q^2} = \frac{12}{2 + 2^2} = 2$ . Теперь найдем остальные числа:  $b = aq = 2 \cdot 2 = 4$ ,  $c = aq^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$  и  $d = 2c - b = 2 \cdot 8 - 4 = 12$ .

б)  $q = \frac{3}{5}$ . Из второго уравнения найдем  $a = \frac{12}{q + q^2} = \frac{12}{\frac{3}{5} + (\frac{3}{5})^2} = \frac{12}{\frac{24}{25}} = \frac{25}{2} = 12,5$ . Также найдем остальные числа:  $b = aq = 12,5 \times \frac{3}{5} = 7,5$ ,  $c = aq^2 = 12,5 \cdot (\frac{3}{5})^2 = 4,5$  и  $d = 2c - b = 2 \cdot 4,5 - 7,5 = 1,5$ .

Ответ: 2; 4; 8; 12 или 12,5; 7,5; 4,5; 1,5.

**38)** Знаменатель геометрической прогрессии  $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{2}{(\sqrt{3} + 1)\sqrt{3}} =$

$$= \frac{2}{3 + \sqrt{3}} = \frac{2(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{2(3 - \sqrt{3})}{9 - 3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Найдем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{\sqrt{3}}{1 - (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})} = \sqrt{3} : \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3.$$

Ответ:  $q = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $S = 3$ .

**39)** Так как сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 10,5, то получаем уравнение:  $b_1 + b_1q + b_1q^2 = 10,5$

или  $b_1(1+q+q^2)=10,5$ . Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12. Имеем уравнение:  $\frac{b_1}{1-q}=12$ . Разделим первое уравнение на второе:  $\frac{b_1(1+q+q^2)(1-q)}{b_1}=\frac{10,5}{12}$  или

$1-q^3=\frac{7}{8}$ , откуда  $q^3=\frac{1}{8}$  и  $q=\frac{1}{2}$ . Из второго уравнения найдем  $b_1=12(1-q)=12\left(1-\frac{1}{2}\right)=6$ .

Ответ:  $b_1=6$ ,  $q=\frac{1}{2}$ .

40) Известно, что числа  $a^m$ ,  $a^n$ ,  $a^p$  образуют геометрическую прогрессию. Поэтому выполняется свойство такой прогрессии: квадрат любого члена равен произведению с ним соседних членов, т.е.  $(a^n)^2=a^m \cdot a^p$  или  $a^{2n}=a^{m+p}$ , откуда  $2n=m+p$ . Записанное соотношение — свойство арифметической прогрессии: удвоенный член прогрессии равен сумме с ним соседних. Поэтому числа  $m$ ,  $n$ ,  $p$  образуют арифметическую прогрессию. Эти числа являются логарифмами чисел  $a^m$ ,  $a^n$ ,  $a^p$ :  $m=\log_a a^m$ ,  $n=\log_a a^n$ ,  $p=\log_a a^p$ .

Ответ: доказано.

## § 2. Тождественные преобразования

41а) Сгруппируем слагаемые и вынесем общие множители за скобки:  $a^2+b^2+2a-2b-2ab=(a^2-2ab+b^2)+(2a-2b)=(a-b)^2+2(a-b)=(a-b)(a-b+2)$ . Ответ:  $(a-b)(a-b+2)$ .

41б) Раскроем скобки, сгруппируем члены выражения и вынесем общие множители за скобки:  $x^3+(y-1)x+y=x^3+yx-x+x+y=(x^3-x)+(yx+y)=x(x^2-1)+y(x+1)=x(x-1)(x+1)+y(x+1)=(x+1)(x(x-1)+y)=(x+1)(x^2-x+y)$ .

Ответ:  $(x+1)(x^2-x+y)$ .

42б) В данном выражении разложим квадратные трехчлены на множители, используя формулы сокращенного умножения:  $(n^2+4n+3)(n^2+6n+8)=(n^2+4n+4-1)(n^2+6n+9-1)=((n+2)^2-1^2)((n+3)^2-1^2)=(n+2+1)(n+2-1)(n+3+1)(n+3-1)=(n-3)(n+1)(n+4)(n+2)=(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ . Среди четырех последовательных натуральных чисел  $n+1$ ,  $n+2$ ,  $n+3$ ,  $n+4$  обязательно одно число кратно 2, одно — кратно 3 и одно — кратно 4. Поэтому произведение таких чисел делится на  $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ .

Например, среди четырех последовательных натуральных чисел 28, 29, 30, 31: число 28 кратно 4 (т.е.  $28=4 \cdot 7$ ), число 30 кратно 2 и 3 (т.е.  $30=2 \cdot 3 \cdot 5$ ). Поэтому число  $28 \cdot 29 \cdot 30 \cdot 31=4 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31=(4 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (7 \cdot 29 \cdot 5 \cdot 31)=24 \cdot (7 \cdot 29 \cdot 5 \cdot 31)$  кратно 24.

Ответ: доказано.

**43а)** Разложим числитель и знаменатель дроби на множители. В числителе используем группировку членов, в знаменателе — формулу для квадрата суммы чисел. Получаем:  $\frac{a^3 + a^2 - a - 1}{a^2 + 2a + 1} = \frac{(a^3 + a^2) - (a + 1)}{(a + 1)^2} = \frac{a^2(a + 1) - (a + 1)}{(a + 1)^2} = \frac{(a + 1)(a^2 - 1)}{(a + 1)^2} = \frac{(a + 1)(a + 1)(a - 1)}{(a + 1)^2} = a - 1$ . Ответ:  $a - 1$ .

**44г)** Разложим знаменатели дробей на множители и сложим их, приведя к общему знаменателю. Получаем:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{c^2 + 3c + 2} + \frac{2c}{c^2 + 4c + 3} + \frac{1}{c^2 + 5c + 6} \right)^2 \cdot \frac{(c - 3)^2 + 12c}{2} = \left( \frac{1}{(c + 1)(c + 2)} + \right. \\ & \left. + \frac{2c}{(c + 1)(c + 3)} + \frac{1}{(c + 2)(c + 3)} \right)^2 \cdot \frac{c^2 - 6c + 9 + 12c}{2} = \left( \frac{c + 3 + 2c(c + 2) + c - 1}{(c + 1)(c + 2)(c + 3)} \right)^2 \times \\ & \times \frac{c^2 + 6c + 9}{2} = \left( \frac{c + 3 + 2c^2 + 4c + c + 1}{(c + 1)(c + 2)(c + 3)} \right)^2 \cdot \frac{(c + 3)^2}{2} = \frac{(2c^2 + 6c + 4)^2 (c + 3)^2}{(c + 1)^2 (c + 2)^2 (c + 3)^2 \cdot 2} = \\ & = \frac{4(c^2 + 3c + 2)^2}{(c + 1)^2 (c + 2)^2 \cdot 2} = \frac{2((c + 1)(c + 2))^2}{(c + 1)^2 (c + 2)^2} = \frac{2(c + 1)^2 (c + 2)^2}{(c + 1)^2 (c + 2)^2} = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

**45а)** В скобках данного выражения сначала вычтем первые две дроби, приведя их к общему знаменателю. Деление выражений заменим умножением на дробь, обратную делителю. Получаем:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{3}{2x - y} - \frac{2}{2x + y} - \frac{1}{2x - 5y} \right) : \frac{4y^2}{4x^2 - y^2} = \left( \frac{3(2x + y) - 2(2x - y)}{(2x - y)(2x + y)} - \frac{1}{2x - 5y} \right) \times \\ & \times \frac{4x^2 - y^2}{4y^2} = \left( \frac{6x + 3y - 4x + 2y}{4x^2 - y^2} - \frac{1}{2x - 5y} \right) \cdot \frac{4x^2 - y^2}{4y^2} = \left( \frac{2x + 5y}{4x^2 - y^2} - \frac{1}{2x - 5y} \right) \times \\ & \times \frac{4x^2 - y^2}{4y^2} = \frac{(2x + 5y)(2x - 5y) - (4x^2 - y^2)}{(4x^2 - y^2)(2x - 5y)} \cdot \frac{4x^2 - y^2}{4y^2} = \frac{4x^2 - 25y^2 - 4x^2 + y^2}{(2x - 5y) \cdot 4y^2} = \\ & = \frac{-24y^2}{(2x - 5y) \cdot 4y^2} = \frac{-6}{2x - 5y} = \frac{6}{5y - 2x}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{6}{5y - 2x}$ .

**46а)** Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе, умножим числитель и знаменатель дроби на  $(\sqrt{3} - \sqrt{5})$  — величину, сопряженную знаменателю. Получаем:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{3 - 5} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{-2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2}.$

**47а)** Используем определение корня и его свойства. Получаем:

$$\sqrt[3]{(\sqrt{5} - 2,5)^2} - \sqrt[3]{(1,5 - \sqrt{5})^3} - 1 = |\sqrt{5} - 2,5| - (1,5 - \sqrt{5}) - 1 =$$

$$= -(\sqrt{5} - 2,5) - 1,5 + \sqrt{5} - 1 = -\sqrt{5} + 2,5 - 1,5 + \sqrt{5} - 1 = 0.$$

Было учтено, что  $\sqrt{5} - 2,5 < 0$  и  $|\sqrt{5} - 2,5| = -(\sqrt{5} - 2,5)$ .

Ответ: 0.

**47б)** Вынесем множители из-под корней и используем форму-

лы сокращенного умножения. Имеем: 
$$\frac{(5\sqrt{3} + \sqrt{50})(5 - \sqrt{24})}{\sqrt{75} - 5\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(5\sqrt{3} + \sqrt{25 \cdot 2})(5 - \sqrt{4 \cdot 6})}{\sqrt{25 \cdot 3} - 5\sqrt{2}} = \frac{(5\sqrt{3} + 5\sqrt{2})(5 - 2\sqrt{6})}{5\sqrt{3} - 5\sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{3} + 2)(3 - 2\sqrt{6} + 2)}{5(\sqrt{3} - \sqrt{2})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1. \quad \text{Ответ: 1.}$$

**48а)** Разложим знаменатели дробей на множители, приведем их к общему знаменателю и найдем алгебраическую сумму дробей.

Имеем: 
$$\left( \frac{a+2}{\sqrt{2a}} - \frac{a}{\sqrt{2a}+2} + \frac{2}{a-\sqrt{2a}} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} = \left( \frac{a+2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a}} - \frac{a}{\sqrt{2}(\sqrt{a}+\sqrt{2})} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{2})} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} = \frac{(a+2)(\sqrt{a}+\sqrt{2})(\sqrt{a}-\sqrt{2}) - a\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}(\sqrt{a}+\sqrt{2})}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{2})(\sqrt{a}-\sqrt{2})}$$

$$\times \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} = \frac{(a+2)(a-2) - a \cdot a + a\sqrt{a} \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{a} + 2 \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{2})(\sqrt{a}-\sqrt{2})} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} =$$

$$= \frac{a^2 - 4 - a^2 + a\sqrt{a} \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{a} + 4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{2})(a+2)} = \frac{a\sqrt{a} \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{2})(a+2)} =$$

$$= \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{2}(a+2)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{2})(a+2)} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{2}}.$$

Ответ:  $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{2}}.$

**48г)** Для преобразований используем формулы сокращенного умножения. Получаем:  $\left(\frac{\sqrt{c}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{c}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}-1} - \frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}-1}\right) = \left(\frac{c-1}{2\sqrt{c}}\right)^2 \times$   
 $\times \frac{(\sqrt{c}-1)^2 - (\sqrt{c}+1)^2}{(\sqrt{c}+1)(\sqrt{c}-1)} = \frac{(c-1)^2}{4c} \cdot \frac{(\sqrt{c}-1-\sqrt{c}+1)(\sqrt{c}-1-\sqrt{c}-1)}{c-1} =$   
 $= \frac{(c-1) \cdot 2\sqrt{c}(-2)}{4c} = \frac{-(c-1)}{\sqrt{c}} = \frac{1-c}{\sqrt{c}}. \quad \text{Ответ: } \frac{1-c}{\sqrt{c}}.$

**49б)** При преобразованиях используем формулы сокращенного умножения. Имеем:  $\left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - (2\sqrt{b})^2}{a-b} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) : \frac{32b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} =$   
 $= \left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-2\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{32b\sqrt{b}} =$   
 $= \left(\frac{(\sqrt{a}+3\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{32b\sqrt{b}} =$   
 $= \frac{(\sqrt{a}+3\sqrt{b}-\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \cdot 32b\sqrt{b}} = \frac{4\sqrt{b}}{32b\sqrt{b}} = \frac{1}{8b}.$   
**Ответ:**  $\frac{1}{8b}.$

**50а)** При преобразованиях применим формулы сокращенного умножения. Получаем:

$$\frac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1} : \frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1} + \frac{2}{x^{-0,5}} = \frac{(x^{\frac{1}{2}}+1)(x^{\frac{1}{2}}-1)\left((x^{\frac{1}{2}})^3-1^3\right)}{(x+x^{\frac{1}{2}}+1)(x^{\frac{1}{2}}+1)} + 2x^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{(x^{\frac{1}{2}}-1)(x^{\frac{1}{2}}-1)(x+x^{\frac{1}{2}}+1)}{x+x^{\frac{1}{2}}+1} + 2x^{\frac{1}{2}} = (x^{\frac{1}{2}}-1)^2 + 2x^{\frac{1}{2}} = x - 2x^{\frac{1}{2}} + 1 + 2x^{\frac{1}{2}} =$$

$$= x + 1. \quad \text{Ответ: } x + 1.$$

**50в)** Используем формулы сокращенного умножения. Разложим числители и знаменатели дробей на множители. Имеем:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{2x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{3x} \right)^{-1} \cdot \left( \frac{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}}{x - x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} - \frac{x - y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \right) = \left( \frac{x^{\frac{1}{2}}(2x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})}{3x} \right)^{-1} \times \\
& \times \left( \frac{(x^{\frac{1}{2}})^3 - (y^{\frac{1}{2}})^3}{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})} - \frac{(x^{\frac{1}{2}})^2 - (y^{\frac{1}{2}})^2}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \right) = \left( \frac{2x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{3x^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1} \cdot \left( \frac{(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y)}{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})} - \right. \\
& \left. \frac{(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \cdot \left( \frac{x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y}{x^{\frac{1}{2}}} - (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}) \right) = \\
& = \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y - x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y)}{2x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} = \frac{3y^{\frac{1}{2}}(2x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})}{2x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} = 3y^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $3y^{\frac{1}{2}}$ .

**51а)** Разложим числитель и знаменатель дроби на множители. В числителе используем формулу для квадрата разности чисел, в знаменателе группируем члены и вынесем общие множители за скобки. Получаем:

$$\begin{aligned}
& \frac{a^{\frac{7}{3}} - 2a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}} + ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}} - ab^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}b} \cdot a^{-\frac{1}{3}} = \frac{a(a^{\frac{4}{3}} - 2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{4}{3}})}{(a^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}) - (ab^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}b)} \cdot a^{-\frac{1}{3}} = \\
& = \frac{a(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})^2}{a^{\frac{4}{3}}(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}) - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})} \cdot a^{-\frac{1}{3}} = \frac{a(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}) \cdot a^{-\frac{1}{3}}}{(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}})} = \\
& = \frac{a^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})^2}{(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})a^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})} = \frac{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}} = \frac{(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}$ .

**51б)** Разложим знаменатель дроби на множители и используем формулы сокращенного умножения. Получаем:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{2(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}} - x - y \right) : \frac{y - x}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}} = \left( \frac{2(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(y^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}})} - x - y \right) \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{y - x} = \\
& = (-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - x - y) \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{(y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})} = \frac{(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})^2}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$ .

**52а)** В выражении сгруппируем члены, вынесем за скобки общий множитель. Также учтем, что  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ . Получаем:  $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha - (\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha) = \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha \times \left(1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right) = \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = 0$ . Ответ: 0.

**52б)** Раскроем скобки, учтем, что  $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$  и  $\operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta}$ .

Имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin^2 \beta (1 + \operatorname{ctg} \beta) + \cos^2 \beta (1 + \operatorname{tg} \beta)} &= \sqrt{\sin^2 \beta \left(1 + \frac{\cos \beta}{\sin \beta}\right) + \cos^2 \beta \left(1 + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}\right)} = \\ &= \sqrt{\sin^2 \beta + \sin \beta \cos \beta + \cos^2 \beta + \cos \beta \sin \beta} = \sqrt{\sin^2 \beta + 2 \sin \beta \cos \beta + \cos^2 \beta} = \\ &= \sqrt{(\sin \beta + \cos \beta)^2} = |\sin \beta + \cos \beta|. \quad \text{Ответ: } |\sin \beta + \cos \beta|. \end{aligned}$$

**53б)** Используем формулы приведения и нечетность функции синус (т.е.  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ ). Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(-\alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} - \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{ctg} \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} &= \frac{-\sin \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} = \\ &= -1 - 1 + 1 = -1. \quad \text{Ответ: } -1. \end{aligned}$$

**53г)** Учтем формулы приведения и таблицу значений тригонометрических функций. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \sin \frac{3\pi}{2} \sin \frac{16\pi}{9} \cos \frac{13\pi}{18}}{\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) \cos \frac{5\pi}{18} \sin \frac{11\pi}{9} \cos 2\pi} &= \frac{\operatorname{tg}\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right) \cdot 1 \cdot \sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{9}\right) \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{18}\right)}{\operatorname{ctg}(-\alpha) \cos \frac{5\pi}{18} \sin\left(\pi + \frac{2\pi}{9}\right) \cdot 1} = \\ &= \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right) \left(-\cos \frac{5\pi}{18}\right)}{-\operatorname{ctg} \alpha \cos \frac{5\pi}{18} \left(-\sin \frac{2\pi}{9}\right)} = \frac{-\operatorname{ctg} \alpha \left(-\sin \frac{2\pi}{9}\right) \left(-\cos \frac{5\pi}{18}\right)}{\operatorname{ctg} \alpha \cos \frac{5\pi}{18} \sin \frac{2\pi}{9}} = -1. \end{aligned}$$

Ответ: -1.

**54а)** Используем формулу для тангенса суммы аргументов

$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$  и преобразуем левую часть равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha + \beta)} &= \frac{\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} - (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}} = \\ &= \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)(1 - (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta))}{\operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} \beta. \end{aligned}$$

Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано. **Ответ:** доказано.

**546)** Преобразуем левую часть равенства. Для этого используем основное тригонометрическое тождество и формулы для синуса и косинуса двойного аргумента. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{2 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{2 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано. **Ответ:** доказано.

**55а)** Преобразуем левую часть равенства, используя формулы

понижения степени: 
$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \alpha}} &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right|} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( -\cos \frac{\alpha}{2} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\alpha}{2} \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{4}} = \left| \cos \frac{\alpha}{4} \right| = \cos \frac{\alpha}{4}. \end{aligned}$$

Было учтено следующее: так как  $\pi < \alpha < 2\pi$ , то  $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$  (вторая четверть);  $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$  и  $\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = -\cos \frac{\alpha}{2}$ ; так как  $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{4} < \frac{\pi}{2}$  (первая четверть), то  $\cos \frac{\alpha}{4} > 0$  и  $\left| \cos \frac{\alpha}{4} \right| = \cos \frac{\alpha}{4}$ . Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

**Ответ:** доказано.

**56а)** Преобразуем левую часть равенства, используя формулу приведения  $\cos \frac{5\pi}{7} = \cos \left( \pi - \frac{2\pi}{7} \right) = -\cos \frac{2\pi}{7}$ . Данное выражение умножим и разделим на  $\sin \frac{\pi}{7}$  и применим формулу синуса двойного аргумента. Получаем:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} &= \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \left( -\cos \frac{2\pi}{7} \right) = -\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = \\ &= \frac{-(\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}) \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{-\frac{1}{2} (\sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7}) \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \\ &= \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7})}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{-\frac{1}{8} \sin \frac{8\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{\sin \left( \pi + \frac{\pi}{7} \right)}{\sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{-\sin \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, равенство доказано. **Ответ:** доказано.

**56в)** В левой части приведем выражение к общему знаменателю, преобразуем произведение синусов в сумму и используем формулы приведения. Получаем:  $\frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ = \frac{1 - 4 \sin 10^\circ \sin 70^\circ}{\sin 10^\circ} =$

$$= \frac{1 - 4 \cdot \frac{1}{2} (\cos(10^\circ - 70^\circ)) - \cos(10^\circ + 70^\circ)}{\sin 10^\circ} = \frac{1 - 2 \cos 60^\circ + 2 \cos 80^\circ}{\sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{1 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cos(90^\circ - 10^\circ)}{\sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = 2. \text{ Видно, что левая часть равна}$$

правой. Следовательно, равенство доказано. **Ответ:** доказано.

**57б)** Преобразуем левую часть неравенства. Для этого используем формулы приведения и в знаменателе дроби преобразуем произведение синусов в сумму функций. Получаем:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{4}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\alpha}{4}\right)} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{4} - \frac{5\pi}{12} + \frac{\alpha}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{4} + \frac{5\pi}{12} - \frac{\alpha}{4}\right) \right]} +$$

$$+ 2 \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\left(\pi - \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)\right)}{\frac{1}{2} \left( \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{3}\right) - \cos \frac{\pi}{2} \right)} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right)} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} = 4 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) + 2 \sin \frac{\alpha}{2} =$$

$$= 4 \left( \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\alpha}{2} \right) + 2 \sin \frac{\alpha}{2} = 4 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right) +$$

$$+ 2 \sin \frac{\alpha}{2} = 2\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2} \leq 2\sqrt{3} \quad (\text{т.к. функция } \cos \frac{\alpha}{2} \text{ ограничена, т.е.}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} \leq 1). \quad \textbf{Ответ:} \text{ доказано.}$$

**57в)** Преобразуем левую часть неравенства. Для этого используем формулу для разности квадратов чисел и формулу для синуса двойного аргумента. Получаем:  $(1 + \sin \varphi + \cos \varphi)(1 - \sin \varphi + \cos \varphi) \times$   
 $\times (1 + \sin \varphi - \cos \varphi)(\sin \varphi + \cos \varphi - 1) = -((1 + \cos \varphi) + \sin \varphi)((1 + \cos \varphi) -$   
 $- \sin \varphi)((1 - \cos \varphi) + \sin \varphi)((1 - \cos \varphi) - \sin \varphi) = -((1 + \cos \varphi)^2 - \sin^2 \varphi) \times$   
 $\times ((1 - \cos \varphi)^2 - \sin^2 \varphi) = -(1 - 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)(1 - 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi -$   
 $- \sin^2 \varphi) = -(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi -$   
 $- 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = -(2\cos^2 \varphi + 2\cos \varphi)(2\cos^2 \varphi - 2\cos \varphi) = -2\cos \varphi \times$   
 $\times (\cos \varphi + 1) 2\cos \varphi (\cos \varphi - 1) = -4\cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi - 1) = 4\cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) =$   
 $= 4\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = (2\sin \varphi \cos \varphi)^2 = \sin^2 2\varphi \leq 1. \text{ Видно, что неравенство}$   
 выполнено, т.к.  $\sin 2\varphi \leq 1. \quad \textbf{Ответ:} \text{ доказано.}$

58а) К данному выражению прибавим и вычтем  $2\cos^2\alpha\sin^2\alpha$ .  
 Получаем:  $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = (\cos^4\alpha + 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha) - 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha \times$   
 $\times \sin^2\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - \frac{1}{2}(\sin 2\alpha)^2 = 1^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$ .

Ответ:  $\frac{7}{9}$ .

58б) Данное выражение запишем через функции половинного аргумента и разделим числитель и знаменатель дроби на  $\cos \frac{\alpha}{2}$ .  
 Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \alpha} &= \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2})(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2})}{(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2})^2} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{\cos \alpha/2}{\cos \alpha/2} - \frac{\sin \alpha/2}{\cos \alpha/2}}{\frac{\cos \alpha/2}{\cos \alpha/2} + \frac{\sin \alpha/2}{\cos \alpha/2}} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - m}{1 + m}. \quad \text{Ответ: } \frac{1 - m}{1 + m}. \end{aligned}$$

58в) Учтем, что  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  и основное тригонометрическое тождество. Получаем:  $\sin \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2}$  или  $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2}$  или  $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2}$  или  $2 - 2\cos^2 \alpha = \cos \alpha$  или  $0 = 2\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 2$ . Введем новую неизвестную  $t = \cos \alpha$  и получим квадратное уравнение  $0 = 2t^2 + t - 2$ . Корни этого уравнения  $t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$ . Корень  $t = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} < -1$  не подходит. Итак,  $\cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{17} - 1}{4}$ . Ответ:  $\frac{\sqrt{17} - 1}{4}$ .

59а) Используем свойство логарифмов и формулы приведения. Получаем:  $\lg \operatorname{tg} 1^\circ + \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \dots + \lg \operatorname{tg} 89^\circ = \lg (\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 89^\circ) =$   
 $= \lg (\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ) = \lg (\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \times$   
 $\times \dots \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 2^\circ) \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 1^\circ)) = \lg (\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 2^\circ \times$   
 $\times \operatorname{ctg} 1^\circ) = \lg ((\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{ctg} 1^\circ) \cdot (\operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{ctg} 2^\circ) \cdot \dots \cdot (\operatorname{tg} 44^\circ \cdot \operatorname{ctg} 44^\circ) \cdot \operatorname{tg} 45^\circ) =$   
 $= \lg (1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1) = \lg 1 = 0$ . Ответ: 0.

60а) В выражении  $\lg \sin 32^\circ \cdot \lg \cos 7^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \lg \operatorname{ctg} 20^\circ$  определим знак каждого множителя. Изобразив углы на тригонометрическом круге, видим, что  $0 < \sin 32^\circ$ ,  $\cos 7^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 40^\circ < 1$  и  $\lg \sin 32^\circ$ ,  $\lg \cos 7^\circ$ ,  $\lg \operatorname{tg} 40^\circ < 0$ ;  $\operatorname{ctg} 20^\circ > 1$  и  $\lg \operatorname{ctg} 20^\circ > 0$ . Так как в произведе-

дение входит три отрицательных и один положительный множитель, то произведение отрицательно. Ответ: меньше нуля.

**61)** Сначала выразим  $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$  через  $\cos x$ . Для этого используем формулы понижения степени:  $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{(1 - \cos x)/2}{(1 + \cos x)/2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ .

Так как  $\cos x = \frac{a}{b+c}$ , то  $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \frac{a}{b+c}}{1 + \frac{a}{b+c}} = \frac{b+c-a}{b+c+a}$ . Аналогично най-

дем  $\operatorname{tg}^2 \frac{y}{2} = \frac{a+c-b}{a+b+c}$  и  $\operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} = \frac{a+b-c}{a+b+c}$ . Теперь вычислим

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} = \frac{b+c-a}{b+c+a} + \frac{a+c-b}{a+b+c} + \frac{a+b-c}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1.$$

Ответ: 1.

**62а)** Представим числа  $3^{400}$  и  $4^{300}$  в виде чисел с одинаковой степенью:  $3^{400} = (3^4)^{100} = 81^{100}$  и  $4^{300} = (4^3)^{100} = 64^{100}$ . Так как  $81 > 64$ , то  $81^{100} > 64^{100}$ , т.е.  $3^{400} > 4^{300}$ . Ответ:  $3^{400} > 4^{300}$ .

**62б)** Найдем данные числа:  $-\log_5 \frac{1}{5} = -\log_5 5^{-1} = 1$  и  $7^{\log_3 1} = 7^0 = 1$ . Видно, что данные числа равны:  $-\log_5 \frac{1}{5} = 7^{\log_3 1}$ .

Ответ:  $-\log_5 \frac{1}{5} = 7^{\log_3 1}$ .

**63а)** Используя свойства логарифма, упростим первое число:  $\log_3 2 + \log_3 7 = \log_3 (2 \cdot 7) = \log_3 14$ . Второе число запишем в виде:  $\log_3 (2 + 7) = \log_3 9$ . Так как  $14 > 9$  и основание логарифма 3 больше единицы (логарифмическая функция возрастающая), то логарифмы этих чисел связаны неравенством того же знака  $\log_3 14 > \log_3 9$ , т.е.  $\log_3 2 + \log_3 7 > \log_3 (2 + 7)$ . Ответ:  $\log_3 2 + \log_3 7 > \log_3 (2 + 7)$ .

**64а)** Используем свойства логарифмов и свойства степеней. Получаем:

$$\begin{aligned} 81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log_9 4} + 25^{\log_{125} 8} &= 81^{\frac{1}{4}} \cdot 81^{-\frac{1}{2} \log_9 4} + \left(5^2\right)^{\frac{\log_5 8}{\log_5 125}} = \left(3^4\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(9^2\right)^{-\frac{1}{2} \log_9 4} + \\ &+ \left(5^2\right)^{\frac{\log_5 2^3}{\log_5 5^3}} = 3 \cdot 9^{-\log_9 4} + \left(5^2\right)^{\frac{3 \log_5 2}{3}} = 3 \cdot \left(9^{\log_9 4}\right)^{-1} + 5^{2 \log_5 2} = 3 \cdot 4^{-1} + \\ &+ \left(5^{\log_5 2}\right)^2 = \frac{3}{4} + 2^2 = \frac{3}{4} + 4 = 4 \frac{3}{4}. \quad \text{Ответ: } 4 \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

**65а)** Используем свойства степеней и основное логарифмическое тождество. Получаем:

$$49^{1 - \log_7 2} + 5 = 49^1 \cdot 49^{-\log_7 2} + 5 = 49 \cdot \left(7^2\right)^{-\log_7 2} + 5 = 49 \cdot 7^{-2 \log_7 2} + 5 =$$

$$= 49 \cdot \left(7^{\log_7 2}\right)^{-2} + 5 = 49 \cdot 2^{-2} + 5 = \frac{49}{4} + 5 = 12\frac{1}{4} + 5 = 17\frac{1}{4} = 17,25.$$

Ответ: 17,25.

**66а)** Воспользуемся свойствами логарифмов. Получаем:

$$\frac{\lg 8 + \lg 18}{2 \lg 2 + \lg 3} = \frac{\lg (8 \cdot 18)}{\lg 2^2 + \lg 3} = \frac{\lg 144}{\lg 4 + \lg 3} = \frac{\lg 12^2}{\lg (4 \cdot 3)} = \frac{2 \lg 12}{\lg 12} = 2.$$

Ответ: 2.

**67а)** Используем свойства логарифмов. Имеем:

$$\begin{aligned} \log_5 \left( 25b^3 \sqrt[4]{c^7} \right) &= \log_5 \left( 25b^3 c^{\frac{7}{4}} \right) = \log_5 25 + \log_5 b^3 + \log_5 c^{\frac{7}{4}} = \\ &= 2 + 3 \log_5 b + \frac{7}{4} \log_5 c. \end{aligned} \quad \text{Ответ: } 2 + 3 \log_5 b + \frac{7}{4} \log_5 c.$$

**68а)** Преобразуем правую часть уравнения, используя свойства логарифмов:

$$\begin{aligned} \log_4 x &= 2 \log_4 10 + \frac{3}{4} \log_4 81 - \frac{2}{3} \log_4 125 = \log_4 10^2 + \log_4 81^{\frac{3}{4}} + \\ &+ \log_4 125^{-\frac{2}{3}} = \log_4 100 + \log_4 (3^4)^{\frac{3}{4}} + \log_4 (5^3)^{-\frac{2}{3}} = \log_4 100 + \log_4 3^3 + \\ &+ \log_4 5^{-2} = \log_4 100 + \log_4 27 + \log_4 \frac{1}{25} = \log_4 \left( 100 \cdot 27 \cdot \frac{1}{25} \right) = \log_4 108. \end{aligned}$$

Получили  $\log_4 x = \log_4 108$ , откуда  $x = 108$ . Ответ:  $x=108$ .

**70)** Во всех логарифмах перейдем к новому основанию 10 и используем свойства логарифмов. Тогда получаем:  $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \times$

$$\times \log_6 5 \cdot \dots \cdot \log_{10} 9 = \frac{\lg 2}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 3}{\lg 4} \cdot \frac{\lg 4}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 5}{\lg 6} \cdot \dots \cdot \frac{\lg 9}{\lg 10} = \frac{\lg 2}{\lg 10} = \lg 2 \approx 0,3010.$$

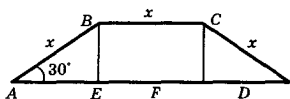
Ответ:  $\lg 2 \approx 0,3010$ .

**71)** Найдем связь между числами  $\sqrt{3} - 1$  и  $\sqrt{3} + 1$ ;  $\sqrt{6} + 2$  и  $\sqrt{6} - 2$ . Для этого избавимся от иррациональности в числителе.

$$\begin{aligned} \text{Получаем: } \sqrt{3} - 1 &= \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3} + 1} = \frac{3 - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 \cdot (\sqrt{3} + 1)^{-1} \text{ и } \sqrt{6} + 2 = \\ &= \frac{(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{6} - 2)}{\sqrt{6} - 2} = \frac{6 - 4}{\sqrt{6} - 2} = 2(\sqrt{6} - 2)^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{имеет вид: } \log_2(\sqrt{3} - 1) + \log_2(\sqrt{6} + 2) &= \log_2 \left( 2(\sqrt{3} + 1)^{-1} \right) + \\ &+ \log_2 \left( 2(\sqrt{6} - 2)^{-1} \right) = \log_2 2 + \log_2 (\sqrt{3} + 1)^{-1} + \log_2 2 + \log_2 (\sqrt{6} - 2)^{-1} = \\ &= 1 - \log_2 (\sqrt{3} + 1) + 1 - \log_2 (\sqrt{6} - 2) = 2 - \left( \log_2 (\sqrt{3} + 1) + \log_2 (\sqrt{6} - 2) \right) = \\ &= 2 - A. \end{aligned} \quad \text{Ответ: } 2 - A.$$

## § 3. Функции



**72а)** Рассмотрим равнобедренную трапецию  $ABCD$ :  $AB = BC = CD = x$ . Рассмотрим  $\triangle ABE$  ( $BE$  и  $CF$  — высоты трапеции):  $BE = AB \sin A = x \sin 30^\circ = \frac{1}{2}x$  и  $AE =$

$= AB \cos A = x \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ . Найдём нижнее основание трапеции:

$$AD = AE + EF + FD = \frac{\sqrt{3}}{2}x + x + \frac{\sqrt{3}}{2}x = x + \sqrt{3}x = x(1 + \sqrt{3}).$$

Площадь трапеции: 
$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot BE = \frac{x + x(1 + \sqrt{3})}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x(2 + \sqrt{3}) \cdot x}{4} = \frac{x^2(2 + \sqrt{3})}{4}.$$

**Ответ:**  $S = \frac{x^2(2 + \sqrt{3})}{4}.$

**76а)** Обсудим график функции, приведенный на рисунке 151, а.

1) Функция возрастает на промежутках  $[-5; -3]$  и  $[-2; 1,5]$ .

2) Функция убывает на промежутках  $[-3; -2]$  и  $[1,5; 6,5]$ .

3) Точка максимума  $x_{\max} = -3$  и  $f_{\max} = f(-3) = 2,5$ ; точка минимума  $x_{\min} = -2$  и  $f_{\min} = f(-2) = 0,5$ .

4) На отрезке  $[-2; 2]$  наибольшее значение функции  $f_{\max} = f(1,5) = 3,5$  и наименьшее значение  $f_{\min} = f(-2) = 0,5$ .

5) Функция не является непрерывной в точке  $x = 1,5$  и  $f(1,5) = 3,5$ .

6) Функция непрерывна на промежутках  $[-5; 1,5]$  и  $(1,5; 6,5]$ .

**Ответ:** см. решение.

**77а)** Область определения функции  $y = \frac{x-2}{x^2+2x-8}$  задается условием  $x^2 + 2x - 8 \neq 0$  (т.к. делить на нуль нельзя). Корни квадратного уравнения  $x^2 + 2x - 8 = 0$   $x_1 = -4$  и  $x_2 = 2$ . Поэтому  $D(y) = (-\infty; -4) \cup (-4; 2) \cup (2; \infty)$ . **Ответ:**  $(-\infty; -4) \cup (-4; 2) \cup (2; \infty)$ .

**79а)** Область определения функции  $y = x^3 - 3x$   $D(y) = \mathbb{R}$  — симметричное множество. Найдём  $y(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -y(x)$ . Так как выполняется равенство  $y(-x) = -y(x)$ , то функция  $y(x)$  по определению нечетная.

**Ответ:** функция нечетная.

**80в)** Найдём промежутки знакопостоянства функции  $y = 1 - \frac{2x-3}{5-x} = \frac{5-x-2x+3}{5-x} = \frac{8-3x}{5-x}$  методом интервалов. Определим точки, в которых обращаются в нуль числитель  $8 - 3x = 0$  (откуда  $x = \frac{8}{3}$ ) и знаменатель  $5 - x = 0$  (тогда  $x = 5$ ) дроби. Отметим эти

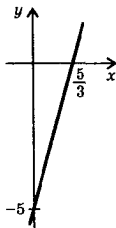


точки на координатной оси. Они разбивают ось на три интервала. Определим знак функции, например, в последнем, третьем промежутке. При  $x = 10$  (из этого интервала) имеем:  $y = \frac{8 - 3 \cdot 10}{5 - 10} > 0$ . При переходе к каждому следующему интервалу знак функции меняется на противоположный. Получили диаграмму знаков данной функции. Итак,  $y > 0$  при  $x \in \left(-\infty; \frac{8}{3}\right) \cup (5; \infty)$  и  $y < 0$  при  $x \in \left(\frac{8}{3}; 5\right)$ . Ответ:  $y > 0$  на  $\left(-\infty; \frac{8}{3}\right)$  и  $(5; \infty)$ ;  $y < 0$  на  $\left(\frac{8}{3}; 5\right)$ .

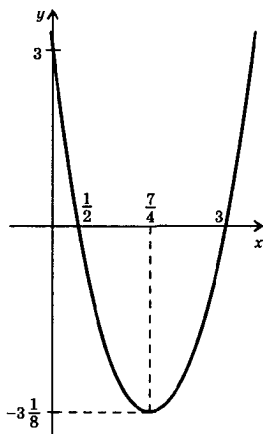
**81а)** Найдем абсциссу вершины параболы  $y = 4x^2 + 3x - 1$ :  $x_b = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot 4} = -\frac{3}{8}$ . Так как старший коэффициент  $a = 4$  положительный, то ветви параболы направлены вверх. Следовательно, функция убывает на промежутке  $\left(-\infty; -\frac{3}{8}\right]$ , возрастает — на промежутке  $\left[-\frac{3}{8}; \infty\right)$ , точка  $x = -\frac{3}{8}$  — точка минимума.

Ответ: промежуток убывания  $\left(-\infty; -\frac{3}{8}\right]$ , промежуток возрастания  $\left[-\frac{3}{8}; \infty\right)$ , точка минимума  $x = -\frac{3}{8}$ .

**82а)** Функция  $y = 3x - 5$  линейная и ее графиком является прямая линия. Область определения  $D(y) = \mathbb{R}$  и область значений  $E(y) = \mathbb{R}$ . Так как угловой коэффициент 3 положительный, то функция возрастает на  $\mathbb{R}$ . Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Если  $x = 0$ , то  $y = 3x - 5 = 3 \cdot 0 - 5 = -5$ . Если  $y = 0$ , то имеем уравнение  $0 = 3x - 5$ , откуда  $x = \frac{5}{3}$ . Отметим эти точки и проведем через них прямую линию.



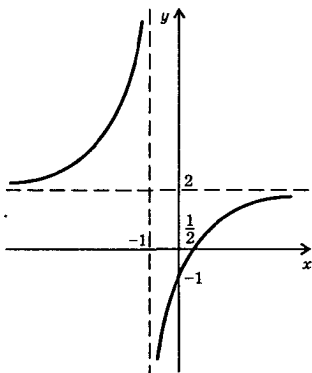
Ответ: см. решение.



826) Функция  $y = 2x^2 - 7x + 3$  определена на  $R$ , т.е.  $D(y) = R$ . Графиком функции является парабола, направленная ветвями вверх. Найдем координаты вершины параболы:  $x_b = -\frac{b}{2a} = -\frac{-7}{2 \cdot 2} = \frac{7}{4}$  и  $y_b = y\left(\frac{7}{4}\right) = 2\left(\frac{7}{4}\right)^2 - 7 \cdot \frac{7}{4} + 3 = \frac{49}{8} - \frac{49}{4} + 3 = -\frac{49}{8} + 3 = -3\frac{1}{8}$ . Поэтому область значений

функции  $E(y) = \left[-3\frac{1}{8}; \infty\right)$ . Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Если  $x = 0$ , то  $y = 2 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 + 3 = 3$ . Если  $y = 0$ , то получаем квадратное уравнение  $0 =$

$= 2x^2 - 7x + 3$ , корни которого  $x_1 = \frac{1}{2}$  и  $x_2 = 3$ . Отметим характерные точки параболы и построим график. **Ответ:** см. решение.



83а) Функция  $y = 2 - \frac{3}{x+1}$  определена при  $x \neq -1$  (т.к. делить на нуль нельзя), т.е.  $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$ . Прямая  $x = -1$  — вертикальная асимптота данной функции. При  $x \rightarrow \infty$  величина  $\frac{3}{x+1} \rightarrow 0$  и функция  $y \rightarrow 2$ . Поэтому область значений функции  $E(y) = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$ . Прямая  $y = 2$  — горизонтальная асимптота. Запишем функцию в виде:  $y = 2 - \frac{3}{x+1} = \frac{2x+2-3}{x+1} = \frac{2x-1}{x+1}$  и найдем точки пересечения

графика с осями координат. Если  $x = 0$ , то  $y = \frac{2 \cdot 0 - 1}{0 + 1} = -1$ .

Если  $y = 0$ , то получаем уравнение  $0 = \frac{2x-1}{x+1}$ , откуда  $x = \frac{1}{2}$ . Отметим характерные точки, построим асимптоты функции, Учтем, что

графиком функции является гипербола, и построим этот график.

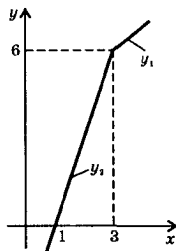
Ответ: см. решение.

**85в)** Для построения графика функции  $y = 2x - |x - 3|$  надо раскрыть знак модуля. Име-

$$\text{см: } y = \begin{cases} 2x - (x - 3), & \text{если } x - 3 \geq 0 \\ 2x + (x - 3), & \text{если } x - 3 < 0 \end{cases} \text{ или}$$

$y = \begin{cases} x + 3, & \text{если } x \geq 3 \\ 3x - 3, & \text{если } x < 3 \end{cases}$ . Построим график линейной функции  $y = x + 3$  и выберем из него часть  $y_1$ , для которой  $x \geq 3$ . Также строим график линейной функции  $y = 3x - 3$  и выбираем из него часть  $y_2$ , для которой  $x < 3$ .

Ответ: см. решение.

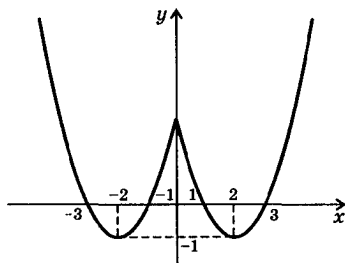


**85г)** Для построения графика функции  $y = x^2 - 4|x| + 3$  учтем, что эта функция четная.

Ее график симметричен относительно оси ординат. Поэтому сначала построим график функции  $y = x^2 - 4x + 3$  для  $x \geq 0$ . Вершина параболы имеет координаты (2; -1). Ось абсцисс пересекается в точках  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 3$ . По этим характерным

точкам построим график функции сначала в области  $x \geq 0$ , а затем зеркально отразим его относительно оси ординат в область  $x < 0$ .

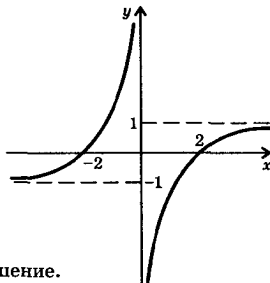
Ответ: см. решение.



**86в)** Учтем, что функция  $y = \frac{|x| - 2}{x}$  нечетная, и ее график симметричен относительно начала координат. Поэтому сначала постро-

им график функции  $y = \frac{x - 2}{x}$  в области  $x > 0$ . Графиком является гипербола. Вертикальная асимптота функции  $x = 0$ , горизонтальная асимптота  $y = 1$  (при  $x \rightarrow \infty$  величина  $y \rightarrow 1$ ). График функции пересекает ось абсцисс в точке  $x = 2$ . Учитывая эти свойства функции, построим ее график сначала в области  $x > 0$ , а затем отразим симметрично относительно начала координат в область  $x < 0$ .

Ответ: см. решение.

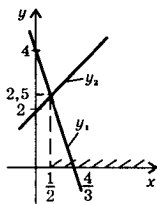


**87а)** Если графики функций  $y = x^2$  и  $y = x + 6$  имеют общую точку, то координаты этой точки удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 6 \end{cases}$$
 Так как левые части уравнений одинаковы, то приравняем и правые:  $x^2 = x + 6$  или  $x^2 - x - 6 = 0$ . Корни этого квадратного уравнения  $x_1 = -2$  и  $x_2 = 3$ . Используя второе уравнение системы  $y = x + 6$ , найдем:  $y_1 = 4$  и  $y_2 = 9$ . Итак, графики данных функций имеют две общие точки с координатами  $(-2; 4)$  и  $(3; 9)$ .

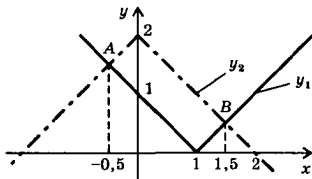
**Ответ:** имеют,  $(-2; 4)$ ,  $(3; 9)$ .

**88в)** Уравнение  $x^5 + 3x = 5$  запишем в виде  $x^5 + 3x - 5 = 0$  и рассмотрим поведение функции  $f(x) = x^5 + 3x - 5 = 0$  на промежутке  $I = [1; 2]$ . Найдем значения функции на концах промежутка:  $f(1) = 1^5 + 3 \cdot 1 - 5 = -1$  и  $f(2) = 2^5 + 3 \cdot 2 - 5 = 33$ . Видно, что эти значения имеют противоположные знаки. Следовательно, на отрезке существует такая точка  $x_0$ , что значение в ней равно нулю, т.е.  $f(x_0) = 0$ . Поэтому данное уравнение на указанном отрезке имеет корень. **Ответ:** доказано.



**89а)** Для решения неравенства  $4 - 3x \leq x - 2$  построим графики линейных функций  $y_1 = 4 - 3x$  и  $y_2 = x + 2$ . Графики этих функций пересекаются в точке с координатами  $\left(\frac{1}{2}; 2\frac{1}{2}\right)$ . Нужно определить, при каких значениях  $x$  график функции  $y_1$  расположен не выше графика  $y_2$ . Из рисунка видно, что это происходит при  $x \in \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$ .

**Ответ:**  $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$ .



$y = |x|$  относительно оси абсцисс и его смещением на две единицы вверх. Видно, что графики функций  $y_1$  и  $y_2$  пересекаются в двух точках  $A$  и  $B$ , абсциссы которых  $x_1 = -0,5$  и  $x_2 = 1,5$  являются решениями данного уравнения. **Ответ:**  $-0,5; 1,5$ .

**906)** Используя свойства модуля, уравнение  $|1 - x| = 2 - |x|$  запишем в виде  $|x - 1| = 2 - |x|$  и построим графики функций  $y_1 = |x - 1|$  и  $y_2 = 2 - |x|$ . График функции  $y_1$  получается смещением графика  $y = |x|$  на одну единицу вправо. График функции  $y_2$  получается отражением графика

**91)** Так как график функции  $y = ax + b$  проходит через точки  $A(2; 1)$  и  $B(5; 10)$ , то координаты этих точек удовлетворяют уравнению функции. Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 1 = a \cdot 2 + b \\ 10 = a \cdot 5 + b \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 1 = 2a + b \\ 10 = 5a + b \end{cases}. \quad \text{Вычтем из первого уравнения второе: } 1 - 10 = 2a - 5a \text{ или } -9 = -3a, \text{ откуда } a = 3. \text{ Из первого уравнения найдем } b = 1 - 2a = 1 - 2 \cdot 3 = -5. \quad \text{Ответ: } a = 3, b = -5.$$

**92а)** На рис. 152,а приведен график квадратичной функции  $y = ax^2 + bx + c$ . Так как ветви параболы направлены вверх, то коэффициент  $a > 0$ . Из рисунка видно, что абсцисса вершины параболы отрицательна, т.е.  $x_b = -\frac{b}{2a} < 0$ . Умножим обе части этого неравенства на отрицательную величину  $(-2a)$ . Знак неравенства меняется на противоположный:  $-\frac{b}{2a} \cdot (-2a) > 0 \cdot (-2a)$ , откуда  $b > 0$ . Найдем значение функции  $y(x)$  при  $x = 0$ :  $y(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$ , т.е.  $y(0) = c$ . Следовательно  $c$  — ордината точки пересечения графика функции с осью ординат. Из рисунка видно, что эта величина отрицательна, т.е.  $c < 0$ . Так как график функции пересекает ось абсцисс, то дискриминант  $D > 0$ . Ответ:  $a > 0, b > 0, c < 0, D > 0$ .

**94в)** Область определения функции  $y = \frac{x^3 + x^2 - x}{x^4 - 1}$   $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$  — симметричное множество. Знаменатель дроби — четная функция. Числитель дроби состоит из четной функции  $x^2$  и нечетной функции  $x^3 - x$ . Учитывая это, представим функцию в виде суммы четной и нечетной функций:  $y(x) = \frac{x^2}{x^4 - 1} + \frac{x^3 - x}{x^4 - 1}$ , где функция  $y_1(x) = \frac{x^2}{x^4 - 1}$  — четная и функция  $y_2(x) = \frac{x^3 - x}{x^4 - 1}$  — нечетная. Ответ:  $y = \frac{x^2}{x^4 - 1} + \frac{x^3 - x}{x^4 - 1}$ .

**95а)** Область определения функции  $y(x) = 5x^6 - 2x^2 - 3$   $D(y) = R$  — симметричное множество. Найдем  $y(-x) = 5(-x)^6 - 2(-x)^2 - 3 = 5x^6 - 2x^2 - 3 = y(x)$ . Так как выполняется равенство  $y(-x) = y(x)$ , то функция  $y(x)$  по определению четная. Ответ: четная.

**95б)** Область определения функции  $y(x) = 4x^5 - 2x^3 + x$   $D(y) = R$  — симметричное множество. Найдем  $y(-x) = 4(-x)^5 - 2(-x)^3 + (-x) = -4x^5 + 2x^3 - x = -(4x^5 - 2x^3 + x) = -y(x)$ . Так как выполняется равенство  $y(-x) = -y(x)$ , то функция  $y(x)$  по определению нечетная.

Ответ: нечетная.

**96в)** Область определения функции  $y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cos x - \frac{3}{2}}$  задается условием  $\sqrt{3} \cos x - \frac{3}{2} \neq 0$  (т.к. делить на нуль нельзя), откуда получаем  $\cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Решая это неравенство, находим  $x \neq \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Таким образом, область определения функции — все  $x$ , кроме  $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ .

Ответ: все числа, кроме чисел  $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$  (где  $n \in \mathbb{Z}$ ).

**97в)** Область определения функции  $y = \sqrt{\sin^2 x - \cos^2 x}$  задается условием  $\sin^2 x - \cos^2 x \geq 0$  (т.к. подкоренное выражение неотрицательное) или  $0 \geq \cos^2 x - \sin^2 x$  или  $0 \geq \cos 2x$ . Это неравенство выполняется во второй и третьей четвертях, т.е.  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ , откуда  $\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + \pi n$ , т.е.  $D(y) = \left[ \frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n \right]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $\left[ \frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n \right]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**97г)** Область определения функции  $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$  задается условиями  $\sin x \geq 0$  и  $\cos x \geq 0$ . Эти неравенства выполняются в первой четверти, т.е.  $0 + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$  или  $D(y) = \left[ 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Ответ:  $\left[ 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**98а)** Функция  $\sin \frac{x}{2}$  ограничена, т.е.  $-1 \leq \sin \frac{x}{2} \leq 1$ . Умножим все части этого неравенства на отрицательное число  $(-3)$ . Знаки неравенства при этом меняются на противоположные:  $3 \geq -3 \sin \frac{x}{2} \geq -3$ . Ко всем частям неравенства прибавим число 1 и получим:  $4 \geq 1 - 3 \sin \frac{x}{2} \geq -2$  или  $4 \geq y \geq -2$ , т.е. область значений данной функции  $E(y) = [-2; 4]$ . Ответ:  $[-2; 4]$ .

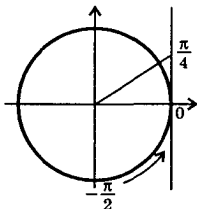
**98б)** Учтем, что  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ . Поэтому область определения данной функции задается условием  $\cos x \neq 0$ . Если  $\cos x = 0$ , то из основного тригонометрического тождества  $\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} = \pm 1$ . Запишем данную функцию  $y = 2 \cos x \operatorname{tg} x$  в виде  $y = 2 \cos x \times$

$\times \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \sin x$ . Очевидно, что выполнено неравенство  $-2 \leq 2 \sin x \leq 2$ . Однако, т.к.  $\cos x \neq 0$ , то  $\sin x \neq \pm 1$  и  $2 \sin x \neq \pm 2$ . Поэтому область значений функции  $E(y) = (-2; 2)$ . Ответ:  $(-2; 2)$ .

**99г)** Функцию  $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$  запишем в виде  $y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{2 \sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$ . Функция  $\sin 2x$  ограничена, т.е.  $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ . Из этого неравенства можно получить:  $\frac{1}{\sin 2x} \leq -1$  или  $\frac{1}{\sin 2x} \geq 1$ , тогда  $\frac{2}{\sin 2x} \leq -2$  или  $\frac{2}{\sin 2x} \geq 2$ . Таким образом, область значений функции  $E(y) = (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$ .

Ответ:  $E(y) = (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$ .

**100б)** Сначала найдем промежутки, на которых функция  $y = 1 - \operatorname{tg} 3x$  положительна. Для этого решим неравенство  $1 - \operatorname{tg} 3x > 0$  или  $\operatorname{tg} 3x < 1$ . Введем новую переменную  $z = 3x$  и получим неравенство  $\operatorname{tg} z < 1$ . На оси тангенсов отложим значение 1 и построим соответствующий угол  $z = \frac{\pi}{4}$ . Неравенству удовлетворяют величины  $-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{4}$ . Учтем периодич-



ность функции тангенс:  $-\frac{\pi}{2} + \pi l < z < \frac{\pi}{4} + \pi l$ , где  $l \in \mathbb{Z}$ . Вернемся теперь к неизвестной  $x$ . Получаем:  $-\frac{\pi}{2} + \pi l < 3x < \frac{\pi}{4} + \pi l$ , откуда  $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n < x < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}n$ . Таким образом,  $y > 0$  на промежутках  $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}n\right)$ . Аналогично найдем, что  $y < 0$  на промежутках  $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}n; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n\right)$ .

Ответ:  $y > 0$  на  $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}n\right)$ ,  $y < 0$  на  $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}n; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n\right)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

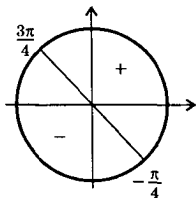
**101б)** Область определения функции  $y(x) = \frac{\sin x \cos^2 x}{x}$   $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$  — симметричное множество. Найдем  $y(-x) = \frac{\sin(-x) \cos^2(-x)}{-x} = \frac{-\sin x \cos^2 x}{-x} = \frac{\sin x \cos^2 x}{x} = y(x)$ . Учтено, что  $\sin x$  — нечетная функция (т.е.  $\sin(-x) = -\sin x$ ) и  $\cos x$  — четная функция

(т.е.  $\cos(-x) = \cos(x)$ ). Получили, что  $y(-x) = y(x)$ . Тогда по определению функция  $y(x)$  — четная. Ответ: четная.

**101в)** Область определения функции  $y = \sin \frac{x^3 - x}{x^2 - 1} = \sin x$   $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$  — симметричное множество. Как известно, функция  $y(x) = \sin x$  — нечетная, т.е.  $y(-x) = -y(x)$ .

Ответ: нечетная.

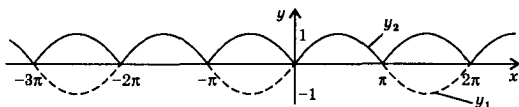
**102г)** Функцию  $y = (\sin x + \cos x)^2$  запишем в виде:  $y = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) + (2\sin x \cos x) = 1 + \sin 2x$ . Функция  $y = 1 + \sin 2x$  периодическая и ее наименьший положительный период  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ . Ответ: периодическая,  $\pi$ .



**104в)** Найдём производную функции  $y = \sin x - \cos x$ . Получаем  $y' = \cos x - (-\sin x) = \cos x + \sin x$ . Приравняем производную нулю:  $\cos x + \sin x = 0$  или  $1 + \operatorname{tg} x = 0$  или  $\operatorname{tg} x = -1$ .

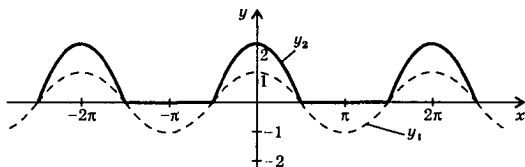
Найдём критические точки  $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . На тригонометрическом круге отложим углы  $x = -\frac{\pi}{4}$  (при  $n = 0$ ) и  $x = \frac{3\pi}{4}$  (при  $n = 1$ ). Определим знак производной  $y' = \cos x + \sin x$ , например, при  $x = 0$ :  $y' = \cos 0 + \sin 0 = 1 > 0$ . При переходе через значение  $x = \frac{3\pi}{4}$  знак производной меняется на противоположный, т.е.  $y' < 0$ . Поэтому точки максимума  $x_{\max} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$  (где  $n \in \mathbb{Z}$ ) и  $y_{\max} = y(x_{\max}) = \sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$ , точки минимума  $x_{\min} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$  и  $y_{\min} = y(x_{\min}) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$ . Ответ:  $y_{\max} = \sqrt{2}$ ,  $y_{\min} = -\sqrt{2}$ .

**105б)** Функцию  $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$  запишем в виде  $y = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$ . Сначала построим график функции  $y_1 = \sin x$ . Там, где  $\sin x \geq 0$ , функции  $y_1 = \sin x$  и  $y_2 = |\sin x|$  совпадают (поэтому эти части графиков  $y_1$  и  $y_2$  также совпадают). Там, где  $\sin x < 0$ , функция  $y_2 = -\sin x = -y_1$ . Поэтому, чтобы построить такую часть графи-



ка функции  $y_2$ , надо часть графика функции  $y_1$  зеркально отразить вверх относительно оси абсцисс. Ответ: см. график.

**106в)** Сначала построим график функции  $y_1 = \cos x$ . Для функции  $y_2 = \cos x + |\cos x|$  раскроем знак модуля, используя определение:



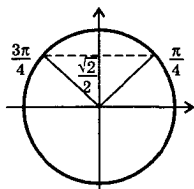
$$y_2 = \begin{cases} \cos x + \cos x, & \text{если } \cos x \geq 0 \\ \cos x - \cos x, & \text{если } \cos x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\cos x, & \text{если } \cos x \geq 0 \\ 0, & \text{если } \cos x < 0 \end{cases}$$
 . Поэтому на промежутках, для которых  $\cos x \geq 0$ , строим функцию  $y_2 = 2y_1 = 2\cos x$ . На промежутках, для которых  $\cos x < 0$ , строим функцию  $y_2 = 0$ . Ответ: см. график.

**108)** Запишем уравнение  $\sin \frac{x}{10} = x^3$  в виде  $\sin \frac{x}{10} - x^3 = 0$  и рассмотрим функцию  $f(x) = \sin \frac{x}{10} - x^3$ . Легко проверить, что эта функция нечетная. Если данное уравнение имеет корень  $x_0$ , то выполняется равенство  $f(x_0) = 0$ . Найдем  $f(-x_0) = -f(x_0) = -0 = 0$ . Следовательно, число  $(-x_0)$  также корень данного уравнения. Ответ: да.

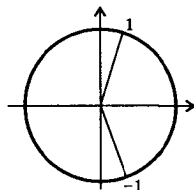
**109а)** Используем формулы приведения и получим:  $\sin\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right) = -\sin \frac{1}{\pi}$  и  $\cos\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right) = -\cos \frac{1}{\pi}$ . Оценим число  $\frac{1}{\pi}$ :  $0 < \frac{1}{\pi} < \frac{\pi}{6}$ . На промежутке  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  функция синус возрастающая, а косинус убывающая. Поэтому:  $\sin 0 < \sin \frac{1}{\pi} < \sin \frac{\pi}{6}$  (или  $0 < \sin \frac{1}{\pi} < \frac{1}{2}$ ) и  $\cos 0 > \cos \frac{1}{\pi} > \cos \frac{\pi}{6}$  (или  $1 > \cos \frac{1}{\pi} > \frac{\sqrt{3}}{2}$ ). Из сравнения неравенств следует, что  $\sin \frac{1}{\pi} < \cos \frac{1}{\pi}$ . Умножим обе части этого неравенства на отрицательное число  $(-1)$ . При этом знак неравенства меняется на

противоположный, и получаем:  $-\sin \frac{1}{\pi} > -\cos \frac{1}{\pi}$ , т.е.  $\sin\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right) > \cos\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right)$ . Ответ:  $\sin\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right) > \cos\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right)$ .

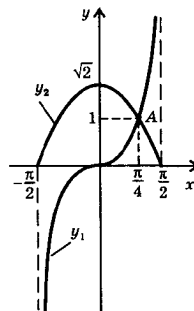
**110а)** Преобразуем левую часть неравенства  $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$ , используя вспомогательный угол. Получаем:  $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha\right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha + \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha\right) = \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ .



Обозначим  $z = \alpha + \frac{\pi}{4}$ . Так как  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , то  $\frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  или  $\frac{\pi}{4} < z < \frac{3\pi}{4}$ . Из рисунка видно, что для таких  $z$  величина  $\sin z > \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Умножим обе части этого неравенства на положительное число  $\sqrt{2}$ . Знак неравенства сохраняется и получаем  $\sqrt{2} \sin z > \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ , т.е.  $\sqrt{2} \sin z > 1$  или  $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$ . Ответ: доказано.

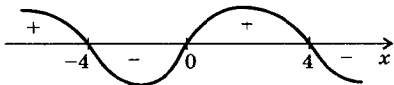


**110б)** Очевидно, что  $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$  при  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Построим углы, равные  $\pm 1$  (радиану). Очевидно, что промежуток  $[-1; 1]$  принадлежит промежутку  $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$ . Очевидно, что при  $-\frac{\pi}{3} < z < \frac{\pi}{3}$  величина  $\cos z > 0$ . Поэтому и  $\cos(\sin \alpha) > 0$  при  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ответ: доказано.



**111б)** Для решения уравнения  $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} \cos x$  на промежутке  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  построим графики функций  $y_1 = \operatorname{tg} x$  и  $y_2 = \sqrt{2} \cos x$ . Видно, что графики этих функций пересекаются в единственной точке А. Абсцисса этой точки  $x = \frac{\pi}{4}$  — единственное решение данного уравнения. Ответ:  $\frac{\pi}{4}$ .

**112а)** Область определения функции  $y = \sqrt{16x - x^3}$  задается условием  $16x - x^3 \geq 0$  (подкоренное выражение должно быть неотрицательным). Решим это неравенство методом интервалов:  $x(16 - x^2) \geq 0$  или  $x(4 + x)(4 - x) \geq 0$ . На диаграмме приведены знаки выражения  $16x - x^3$ . Видно, что неравенство выполнено при  $x \in (-\infty; -4] \cup [0; 4]$ , что и является областью определения  $D(y)$ .

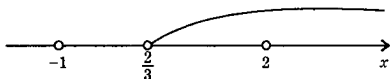


Ответ:  $(-\infty; -4] \cup [0; 4]$ .

**113а)** Область определения функции  $y = \sqrt{x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1}}$  задается условием  $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \geq 0$  (подкоренное выражение должно быть неотрицательным). Решим это неравенство:  $3^x(x^2 - 3) \geq 0$ . Так как при всех  $x$  функция  $3^x > 0$ , то разделим обе части неравенства на  $3^x$ . При этом знак неравенства сохраняется и получаем квадратное неравенство  $x^2 - 3 \geq 0$ . Решение этого неравенства  $x \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; \infty)$  является областью определения данной функции  $D(y)$ .

Ответ:  $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; \infty)$ .

**114в)** Область определения функции  $y = \frac{\ln(3x - 2)}{x^2 - x - 2}$  задается условиями:  $3x - 2 > 0$  (логарифмическая величина должна быть положительной) и  $x^2 - x - 2 \neq 0$  (делить на нуль нельзя). Решая первое неравенство, получаем  $x > \frac{2}{3}$ . Решая второе неравенство, находим:  $x \neq -1$  и  $x \neq 2$ . Учитывая эти результаты, получаем область определения функции  $D(y) = \left(\frac{2}{3}; 2\right) \cup (2; \infty)$ .



Ответ:  $\left(\frac{2}{3}; 2\right) \cup (2; \infty)$ .

**115а)** Функцию  $y = 3x^{-2}$  запишем в виде  $y = \frac{3}{x^2}$ . Так как  $x^2 > 0$ , то  $0 < \frac{3}{x^2} < \infty$ . Поэтому область значений данной функции  $E(y) = (0; \infty)$ . Ответ:  $(0; \infty)$ .

**116а)** Учтем, что функция косинус ограничена, т.е.  $-1 \leq \cos x \leq 1$ . Показательная функция с основанием 2 возрастающая. Поэтому

получаем:  $2^{-1} \leq 2^{\cos x} \leq 2^1$  или  $\frac{1}{2} \leq 2^{\cos x} \leq 2$ . Следовательно, область значений функции  $y = 2^{\cos x}$   $E(y) = \left[\frac{1}{2}; 2\right]$ . Ответ:  $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ .

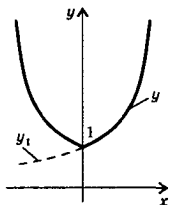
**117в)** Область определения функции  $y = 2 - 3^x$   $D(y) = R$ . Сначала найдем промежуток, на котором функция положительна. Решим неравенство:  $2 - 3^x > 0$  или  $2 > 3^x$ , откуда  $\log_3 2 > x$  или  $x \in (-\infty; \log_3 2)$ . Тогда очевидно, что на промежутке  $x \in (\log_3 2; \infty)$  значения функций  $y < 0$ .

Ответ:  $y > 0$  при  $x \in (-\infty; \log_3 2)$  и  $y < 0$  при  $x \in (\log_3 2; \infty)$ .

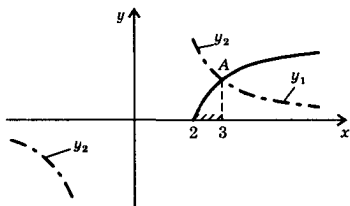
**118б)** Область определения функции  $y = \lg(x - 2) - 1$   $D(y) = (2; \infty)$ . Найдем промежуток, на котором значения функции положительны. Решим неравенство:  $\lg(x - 2) - 1 > 0$  или  $\lg(x - 2) > 1$  или  $\lg(x - 2) > \lg 10$ , откуда  $x - 2 > 10$  и  $x > 12$ , т.е.  $x \in (12; \infty)$ . Очевидно, что на промежутке  $x \in (2; 12)$  значения функции  $y < 0$ .

Ответ:  $y > 0$  при  $x \in (12; \infty)$  и  $y < 0$  при  $x \in (2; 12)$ .

**119а)** Область определения функции  $y(x) = 5^x + 5^{-x}$   $D(y) = R$  — симметричное множество. Найдем  $y(-x) = 5^{-x} + 5^{-(-x)} = 5^{-x} + 5^x = 5^x + 5^{-x} = y(x)$ . Так как  $y(-x) = y(x)$ , то функция  $y(x)$  по определению четная. Ответ: четная.



**123в)** Функция  $y = 2^{|x|}$  определена на  $R$  и является четной. Поэтому сначала построим график этой функции при  $x \geq 0$ . В этом промежутке функция имеет вид  $y_1 = 2^x$ . По свойству четной функции отразим эту часть графика влево относительно оси ординат. Получаем график данной функции. Ответ: см. график.



**126б)** Для решения неравенства  $\sqrt{x-2} \leq \frac{3}{x}$  построим графики функций  $y_1 = \sqrt{x-2}$  и  $y_2 = \frac{3}{x}$ . Видно, что графики этих функций пересекаются в единственной точке  $A$ , абсцисса которой  $x = 3$ . График первой

функции располагается не выше графика второй функции на промежутке  $x \in [2; 3]$ . Ответ:  $[2; 3]$ .

**127)** Для нахождения наибольших значений функций сначала рассмотрим их основания. Очевидно, что  $2 < 3 < 2^2$ , поэтому  $\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 2^2$  или  $1 < \log_2 3 < 2$ . Так как основание  $\log_2 3 > 1$  показательной функции  $y = (\log_2 3)^{\sin x}$ , то эта функция возрастающая. Тогда эта функция имеет наибольшее значение, если показатель степени наибольший, т.е.  $\sin x = 1$ . Это значение функции равно  $y = (\log_2 3)^1 = \log_2 3$ .

Очевидно, что  $1 < 2 < 3$ , поэтому  $\log_3 1 < \log_3 2 < \log_3 3$  или  $0 < \log_3 2 < 1$ . Так как основание показательной функции  $y = (\log_3 2)^{\cos x}$  меньше единицы, то эта функция убывающая. Тогда функция имеет наибольшее значение, если показатель степени наименьший, т.е.

$\cos x = -1$ . Это значение функции равно  $y = (\log_3 2)^{-1} = \frac{1}{\log_3 2} = \log_2 3$ .

Видно, что наибольшие значения двух данных функций равны.

Ответ: доказано.

**128а)** Если  $f(x_0) = 0$ , то выполняется уравнение  $\frac{1}{\sqrt{4x_0 + 1}} - \sqrt{1 - x_0^2} = 0$ . ОДЗ уравнения определяется условиями:  $4x_0 + 1 > 0$  (откуда  $x_0 > -\frac{1}{4}$ ) и  $1 - x_0^2 \geq 0$  (тогда  $-1 \leq x_0 \leq 1$ ). Находим ОДЗ:

$x_0 \in \left(-\frac{1}{4}; 1\right]$ . Запишем уравнение в виде:  $\frac{1}{\sqrt{4x_0 + 1}} = \sqrt{1 - x_0^2}$ .

Возведем обе положительные части в квадрат:  $\frac{1}{4x_0 + 1} = 1 - x_0^2$  или  $1 = (1 - x_0^2)(4x_0 + 1)$  или  $1 = 4x_0 - 4x_0^3 + 1 - x_0^2$  или  $4x_0^3 + x_0^2 - 4x_0 = 0$ . Разложим левую часть уравнения на множители:  $x_0(4x_0^2 + x_0 - 4) = 0$ . Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем два уравнения.

а)  $x_0 = 0$ . Этот корень входит в ОДЗ уравнения.

б)  $4x_0^2 + x_0 - 4 = 0$ . Это квадратное уравнение имеет корни  $x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{65}}{8}$ , причем в ОДЗ входит только корень  $x_0 = \frac{-1 + \sqrt{65}}{8}$ .

Ответ: 0;  $\frac{-1 + \sqrt{65}}{8}$ .

**129а)** Найдем производную функции  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ . Получаем

$f'(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \cdot \ln \frac{1}{3} \cdot (x+1)' = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \cdot \ln \frac{1}{3}$ . Показательная функция  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} > 0$  при всех значениях  $x$ . Множитель  $\ln \frac{1}{3} < 0$ . Поэтому производная  $f'(x) < 0$  при любых значениях  $x$ . Следовательно, функ-

ция  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$  убывает на множестве  $R$ . Ответ: доказано.

#### § 4. Уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств

**130а)** Для решения линейного уравнения  $3(x - 2) - 5 = 4 - (5x - 1)$  раскроем скобки в обеих частях  $3x - 6 - 5 = 4 - 5x + 1$  и приведем подобные члены  $3x - 11 = 5 - 5x$ . Слагаемые, зависящие от  $x$ , перенесем в левую часть, не зависящие от  $x$  — в правую, изменяя их знаки на противоположные:  $3x + 5x = 11 + 5$ . Вновь приведем подобные члены  $8x = 16$ . Разделим обе части уравнения на число 8 и найдем  $x = 2$ . Ответ: 2.

**131б)** Так как  $\left| \frac{x-3}{2} + 5 \right| = 4$ , то выражение, находящееся под знаком модуля, равно  $\pm 4$ . Получаем два уравнения.

а)  $\frac{x-3}{2} + 5 = 4$ , тогда  $\frac{x-3}{2} = -1$  или  $x - 3 = -2$  и  $x = 1$ .

б)  $\frac{x-3}{2} + 5 = -4$ , тогда  $\frac{x-3}{2} = -9$  или  $x - 3 = -18$  и  $x = -15$ .

Ответ: 1; -15.

**132а)** Линейное уравнение  $ax - 2x = 3(x - 1)$  запишем в виде:  $ax - 2x = 3x - 3$  или  $ax - 5x = -3$  или  $x(a - 5) = -3$ . Для нахождения неизвестного  $x$  надо разделить обе части уравнения на коэффициент  $(a - 5)$ . Разделить можно, если этот коэффициент не равен нулю, т.е.  $a \neq 5$ . Тогда уравнение имеет единственное решение  $x = \frac{-3}{a-5} = \frac{3}{5-a}$ . Выясним, какие решения имеет уравнение при  $a = 5$ . Подставим это значение в уравнение  $x(a - 5) = -3$  и получим:  $x \cdot 0 = -3$ . Такое уравнение решений не имеет.

Ответ: при  $a \neq 5$  — единственное решение, при  $a = 5$  — не имеет решений.

**133а)** Умножим обе части линейного неравенства  $\frac{x-1}{2} + x < 1,5x + 3,5$  на положительное число 2. При этом знак неравенства сохраняется:  $x - 1 + 2x < 3x + 7$ . Члены, зависящие от  $x$ , перенесем в левую часть, не зависящие от  $x$  — в правую. Приведем подобные члены:  $x + 2x - 3x < 7 + 1$  или  $0 \cdot x < 8$ . Это неравенство выполняется при любых значениях  $x$ . Поэтому решение данного неравенства  $x \in (-\infty; \infty)$ . Ответ:  $(-\infty; \infty)$ .

**134в)** Умножим обе части неравенства  $\left| \frac{x-7}{3} \right| \leq 2$  на положительное число 3. Знак неравенства сохраняется и получаем:  $|x - 7| \leq 6$ . Это неравенство эквивалентно двойному линейному неравенству:  $-6 \leq x - 7 \leq 6$ . Прибавим ко всем частям неравенства

число 7 и получим:  $-6 + 7 \leq x - 7 + 7 \leq 6 + 7$  или  $1 \leq x \leq 13$ , т.е.  $x \in [1; 13]$ . Ответ:  $[1; 13]$ .

**135в)** Очевидно, что число  $x = \frac{5}{3}$  не является решением неравенства  $(x - 4)|5 - 3x| < 0$ . Разделим обе части на положительное выражение  $|5 - 3x|$ . При этом знак неравенства сохраняется и получаем линейное неравенство  $x - 4 < 0$ , откуда  $x < 4$ . Учтем, что  $x \neq \frac{5}{3}$ , и найдем решение данного неравенства  $x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 4\right)$ .

Ответ:  $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 4\right)$ .

**136в)** В уравнении  $(x - 3)(x - 2) = 6(x - 3)$  последний член перенесем в левую часть и вынесем общий множитель  $(x - 3)$  за скобки. Имеем:  $(x - 3)(x - 2) - 6(x - 3) = 0$  или  $(x - 3)(x - 2 - 6) = 0$  или  $(x - 3)(x - 8) = 0$ . Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Получаем линейные уравнения:  $x - 3 = 0$  (корень  $x = 3$ ) и  $x - 8 = 0$  (корень  $x = 8$ ). Ответ: 3; 8.

**137а)** Пусть  $x_0$  — общий корень двух данных уравнений. Тогда выполняются равенства:  $x_0^2 - ax_0 = 0$  и  $x_0^2 - x_0 - 3a = 0$ . Вычтем из первого равенства второе:  $x_0^2 - ax_0 - (x_0^2 - x_0 - 3a) = 0$  или  $-ax_0 + x_0 + 3a = 0$  или  $3a = x_0(a - 1)$ , откуда  $x_0 = \frac{3a}{a - 1}$  — общий корень.

Подставим это значение  $x_0$ , например, в первое уравнение:

$$\left(\frac{3a}{a-1}\right)^2 - a\left(\frac{3a}{a-1}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{3a}{a-1}\right)\left(\frac{3a}{a-1} - a\right) = 0$$

$$\text{или} \quad \left(\frac{3a}{a-1}\right) \cdot \left(\frac{3a - a^2 + a}{a-1}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{3a^2(4-a)}{(a-1)^2} = 0. \quad \text{Дробь равна нулю,}$$

если ее числитель равен нулю, т.е.  $3a^2(4-a) = 0$ , откуда  $a = 0$  и  $a = 4$ . Проверим найденные значения.

а) При  $a = 0$  данные уравнения имеют вид:  $x^2 = 0$  (корень  $x = 0$ ) и  $x^2 - x = 0$  (корни  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 1$ ). Поэтому уравнения имеют общий корень  $x_0 = 0$ .

б) При  $a = 4$  данные уравнения имеют вид:  $x^2 - 4x = 0$  (корни  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 4$ ) и  $x^2 - x - 12 = 0$  (корни  $x_1 = -3$  и  $x_2 = 4$ ). Видно, что уравнения имеют общий корень  $x_0 = 4$ .

Ответ:  $a = 0, a = 4$ .

**138а)** Рассмотрим уравнение  $(k - 1)x^2 + (k + 4)x + k + 7 = 0$ . Так как коэффициент при  $x^2$  зависит от параметра  $k$ , то возможны два случая.

а) Если  $k = 1$ , то данное уравнение линейное:  $5x + 8 = 0$  и имеет единственный корень  $x = -\frac{8}{5}$ .

б) Если  $k \neq 1$ , то данное уравнение квадратное. Квадратное уравнение имеет единственный корень, если дискриминант равен нулю. Найдем  $D = (k+4)^2 - 4(k-1)(k+7) = k^2 + 8k + 16 - 4k^2 - 24k + 28 = -3k^2 - 16k + 44$ . Получаем уравнение:  $3k^2 + 16k - 44 = 0$ , корни которого  $k_1 = 2$  и  $k_2 = -\frac{22}{3}$ . При этих значениях  $k$  данное уравнение имеет единственный корень. Ответ: 1; 2;  $-\frac{22}{3}$ .

**139)** Для квадратного уравнения  $3x^2 - 5x - 2 = 0$  выполняются формулы Виета:  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{3}$  и  $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{2}{3}$ . Теперь найдем сумму квадратов корней:  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2) - 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{25}{9} + \frac{4}{3} = \frac{37}{9} = 4\frac{1}{3}$ . Затем определим сумму кубов корней:  $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2) \times (x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) = \frac{5}{3} \left(\frac{37}{9} + \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3} \cdot \frac{43}{9} = \frac{215}{27}$ .

Ответ:  $x_1 + x_2 = \frac{5}{3}$ ,  $x_1 x_2 = -\frac{2}{3}$ ,  $x_1^2 + x_2^2 = \frac{37}{9}$ ,  $x_1^3 + x_2^3 = \frac{215}{27}$ .

**140в)** В уравнении  $\frac{2}{x^2 + 5x} + \frac{3}{2x - 10} = \frac{15}{x^2 - 25}$  разложим знаменатели дробей на множители:  $\frac{2}{x(x+5)} + \frac{3}{2(x-5)} = \frac{15}{(x+5)(x-5)}$ . Умножим все члены уравнения на  $2x(x+5)(x-5)$  и получим  $2 \cdot 2(x-5) + 3x(x+5) = 15 \cdot 2x$  или  $4x - 20 + 3x^2 + 15x = 30x$  или  $3x^2 - 11x - 20 = 0$ . Корни этого квадратного уравнения  $x_1 = -\frac{4}{3}$  и  $x_2 = 5$ . При  $x = 5$  знаменатели дробей  $x - 5$  равны нулю, поэтому этот корень не подходит. Ответ:  $-\frac{4}{3}$ .

**141в)** Для решения уравнения  $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{x-1}{x}\right) + 2 = 0$  введем новую неизвестную  $t = \frac{x-1}{x}$  и получим квадратное уравнение  $t^2 - 3t + 2 = 0$ , корни которого  $t_1 = 1$  и  $t_2 = 2$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Получаем два уравнения.

а)  $\frac{x-1}{x} = 1$  или  $x - 1 = x$ . Это уравнение корней не имеет.

б)  $\frac{x-1}{x} = 2$  или  $x - 1 = 2x$ , откуда  $x = -1$ . Ответ: -1.

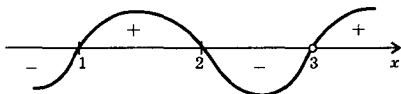
**142в)** В неравенстве  $(3x - 2)^2 - 4x(2x - 3) \geq 0$  раскроем скобки и запишем неравенство в стандартном виде. Получаем:  $9x^2 - 12x +$

$+4 - 8x^2 + 12x \geq 0$  или  $x^2 + 4 \geq 0$ . Это неравенство выполняется при всех значениях  $x$ . Поэтому решение данного неравенства  $x \in (-\infty; \infty)$ .

Ответ:  $(-\infty; \infty)$ .

**143а)** Неравенство  $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} \geq 0$  решим методом интервалов.

Найдем значения  $x$ , при которых обращаются в нуль числитель  $(x-1)(x-2) = 0$  (корни  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 2$ ) и знаменатель  $x-3 = 0$  (корень  $x = 3$ ) дроби  $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}$ . Отметим эти точки на координатной



оси. Они разбивают ось на четыре интервала. Определим знак выражения  $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}$ , например, в последнем четвертом интервале.

Для точки  $x = 4$  из этого промежутка получаем  $\frac{(4-1)(4-2)}{4-3} > 0$ .

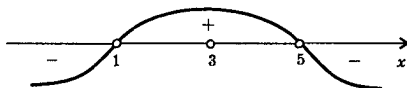
При переходе к каждому следующему интервалу знак выражения меняется на противоположный. Имеем диаграмму знаков дроби  $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}$ . Учтем, что  $x \neq 3$  (т.к. делить на нуль нельзя). На основании диаграммы знаков получаем решение данного неравенства  $x \in [1; 2] \cup (3; \infty)$ . Ответ:  $[1; 2] \cup (3; \infty)$ .

**144в)** Рациональное неравенство  $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$  запишем в виде

$\frac{4-x}{x-5} - \frac{1}{1-x} > 0$  и приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{(4-x)(1-x) - 1 \cdot (x-5)}{(x-5)(1-x)} > 0 \quad \text{или} \quad \frac{4-4x-x+x^2-x+5}{(x-5)(1-x)} > 0 \quad \text{или}$$

$\frac{x^2-6x+9}{(x-5)(1-x)} > 0$  или  $\frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0$ . Число  $x = 3$  не является решением данного неравенства. При  $x \neq 3$  выражение  $(x-3)^2 > 0$  и данное неравенство эквивалентно квадратному неравенству  $(x-5)(1-x) > 0$ . Решим это неравенство методом интервалов. Найдем значения  $x$ , при которых выражение  $(x-5)(1-x)$  равно нулю:  $x_1 = 5$  и  $x_2 = 1$ . Отметим эти точки на координатной оси. Они разбили ось на три интервала. Определим знак выражения  $(x-5)(1-x)$ , например, в последнем третьем промежутке. Для точки  $x = 10$  из этого интервала получаем:  $(10-5)(1-10) < 0$ . При переходе к каждому следующему промежутку знак выражения  $(x-5)(1-x)$



меняется на противоположный. Имеем диаграмму знаков этого выражения. Учтем, что  $x \neq 3$ . На основании диаграммы запишем решение данного неравенства  $x \in (1; 3) \cup (3; 5)$ .

**Ответ:**  $(1; 3) \cup (3; 5)$ .

**145в)** Для доказательства неравенства  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$  найдем разность левой и правой частей. Получаем:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$ , т.к.  $a, b > 0$ , то произведение  $ab > 0$  и числитель  $(a-b)^2 \geq 0$ . Причем данное неравенство обращается в равенство только при  $a = b$ . **Ответ:** доказано.

**146а)** Так как левая часть уравнения  $\sqrt{x^2 + 2x + 10} = 2x - 1$  неотрицательна, то и правая часть должна быть неотрицательной, т.е.  $2x - 1 \geq 0$ . Возведем обе неотрицательные части данного уравнения в квадрат:  $x^2 + 2x + 10 = 4x^2 - 4x + 1$  или  $0 = 3x^2 - 6x - 9$  или  $0 = x^2 - 2x - 3$ . Корни этого квадратного уравнения  $x_1 = -1$  и  $x_2 = 3$ . Условию  $2x - 1 \geq 0$  удовлетворяет только корень  $x = 3$ . **Ответ:** 3.

**147а)** Уравнение  $\sqrt{x+17} - \sqrt{x-7} = 4$  запишем в виде  $\sqrt{x+17} = \sqrt{x-7} + 4$ . Возведем обе неотрицательные части уравнения в квадрат:  $x + 17 = x - 7 + 8\sqrt{x-7} + 16$  или  $8 = 8\sqrt{x-7}$  или  $1 = \sqrt{x-7}$ . Вновь возведем обе неотрицательные части уравнения в квадрат:  $1 = x - 7$ , откуда  $x = 8$ . **Ответ:** 8.

**147б)** Для решения уравнения  $2\sqrt{x-1} + \sqrt[4]{x-1} = 3$  введем новую неизвестную  $t = \sqrt[4]{x-1} \geq 0$ . Получаем квадратное уравнение:  $2t^2 + t = 3$  или  $2t^2 + t - 3 = 0$ . Корни этого уравнения  $t_1 = 1$  и  $t_2 = -\frac{3}{2}$  (не подходит, т.к.  $t \geq 0$ ). Вернемся к старой неизвестной  $x$  и получим уравнение  $\sqrt[4]{x-1} = 1$ . Возведем обе части этого уравнения в четвертую степень:  $x - 1 = 1$ , откуда  $x = 2$ . **Ответ:** 2.

**148а)** Все члены уравнения  $\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{2+x}} + \sqrt{2+x} = 0$  умножим на  $\sqrt{2+x}$ . Получаем  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{2+x} - 4 + 2 + x = 0$  или  $\sqrt{2x+x^2} = 2-x$ . Возведем обе части уравнения в квадрат:  $2x + x^2 = 4 - 4x + x^2$  или

$6x = 4$ , откуда  $x = \frac{2}{3}$ . Легко проверить, что этот корень удовлетворяет данному уравнению. Ответ:  $\frac{2}{3}$ .

**149а)** Для решения уравнения  $\sqrt{225 + x^2} = x^2 - 47$  введем новую неизвестную  $t = \sqrt{225 + x^2}$ . Тогда  $t^2 = 225 + x^2$ , откуда  $x^2 = t^2 - 225$ . Данное уравнение имеет вид:  $t = t^2 - 225 - 47$  или  $0 = t^2 - t - 272$ . Корни этого уравнения  $t_1 = 17$  и  $t_2 = -16$  (не подходит, т.к.  $t \geq 0$ ). Вернемся к старой неизвестно  $x$  и получим:  $x^2 = t^2 - 225 = 17^2 - 225 = 289 - 225 = 64$ , откуда  $x = \pm 8$ . Ответ:  $\pm 8$ .

**150а)** ОДЗ неравенства  $\sqrt{x^2 - 5} \geq 2$  определяется условием  $x^2 - 5 \geq 0$ . Возведем обе неотрицательные части этого неравенства в квадрат:  $x^2 - 5 \geq 4$  (тем более  $x^2 - 5 \geq 0$ ) или  $x^2 - 9 \geq 0$ . Решая неравенство методом интервалов, найдем  $x \in (-\infty; -3] \cup [3; \infty)$ .

Ответ:  $(-\infty; -3] \cup [3; \infty)$ .

**150б)** Так как левая часть неравенства  $\sqrt{(x-2)(1-2x)} > -1$  неотрицательна, а правая — отрицательна, то неравенство выполнено для всех  $x$ , входящих в ОДЗ. ОДЗ данного неравенства определяется условием  $(x-2)(1-2x) \geq 0$ . Решая это неравенство, например, методом интервалов, найдем  $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$ . Ответ:  $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ .

**151а)** В неравенстве  $\sqrt{x^2 - 6x + 9} > 3$  подкоренное выражение является квадратом разности чисел. Поэтому данное неравенство эквивалентно неравенству  $|x - 3| > 3$ . С учетом свойств модуля числа это неравенство эквивалентно двум неравенствам:  $x - 3 > 3$  (откуда  $x > 6$ ) и  $x - 3 < -3$  (откуда  $x < 0$ ). Тогда  $x \in (-\infty; 0) \cup (6; \infty)$  — решение данного неравенства. Ответ:  $(-\infty; 0) \cup (6; \infty)$ .

**151г)** ОДЗ неравенства  $\sqrt{2x - x^2 + 15} \cdot (3x - x^2 - 4) \leq 0$  определяется условием:  $2x - x^2 + 15 \geq 0$  или  $x^2 - 2x - 15 \leq 0$ , решение которого  $x \in [-3; 5]$ . Значения  $x = -3$  и  $x = 5$  являются решениями данного неравенства. При  $x \in (-3; 5)$  выражение  $\sqrt{2x - x^2 + 15}$  положительно. Поэтому разделим обе части данного неравенства на это выражение (знак неравенства при этом сохраняется). Получим неравенство:  $3x - x^2 - 4 \leq 0$  или  $x^2 - 3x + 4 \geq 0$ . Так как дискриминант квадратного трехчлена отрицательный, то это неравенство выполняется для любых значений  $x$ . Следовательно, ОДЗ данного неравенства  $x \in [-3; 5]$  является и его решением. Ответ:  $[-3; 5]$ .

**152а)** Для решения уравнения  $\cos x + 2\cos 2x = 1$  используем формулу для косинуса двойного аргумента и основное тригонометрическое тождество. Получаем:  $\cos x + 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin^2 x + \cos^2 x$  или  $\cos x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$  или  $\cos x + \cos^2 x - 3\sin^2 x = 0$  или  $\cos x + \cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x) = 0$  или  $4\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$ . Введем новую неизвестную  $t = \cos x$  и получим квадратное уравнение  $4t^2 + t - 3 = 0$ , корни которого  $t_1 = -1$  и  $t_2 = \frac{3}{4}$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Получаем два уравнения:  $\cos x = -1$  (решения  $x = \pi + 2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ) и  $\cos x = \frac{3}{4}$  (решения  $x = \pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ).

Ответ:  $\pi + 2\pi k$ ;  $\pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi n$ , где  $k, n \in \mathbb{Z}$ .

**153а)** Используем формулу для разности кубов чисел. Получаем:  $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 + \frac{\sin 2x}{2}$  или  $(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) = 1 + \frac{\sin 2x}{2}$  или  $(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) = 1 + \sin x \cos x$ . Перенесем все члены уравнения в левую часть и вынесем общий множитель за скобки:  $(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) - (1 + \sin x \cos x) = 0$  или  $(1 + \sin x \cos x)(\sin x - \cos x - 1) = 0$ . Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Получаем два уравнения.

а)  $1 + \sin x \cos x = 0$  или  $1 + \frac{\sin 2x}{2} = 0$ , откуда  $\sin 2x = -2$ . Это уравнение решений не имеет, т.к.  $|\sin 2x| \leq 1$ .

б)  $\sin x - \cos x - 1 = 0$  или  $\sin x - \cos x = 1$ . Решим это уравнение методом введения вспомогательного угла. Разделим обе части уравнения на  $\sqrt{2}$ . Получаем:  $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  или  $\cos \frac{\pi}{4} \times \sin x - \sin \frac{\pi}{4} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  или  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Тогда  $x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \times \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \pi n = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n$  (где  $n \in \mathbb{Z}$ ) и  $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi n$ .

Ответ:  $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**153б)** В уравнении  $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$  преобразуем левую часть в произведение:  $2\cos \frac{\frac{\pi}{4} + x + \frac{\pi}{4} - x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4} + x}{2} = 1$

или  $2\cos\frac{\pi}{4}\cos x = 1$  или  $2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos x = 1$ , откуда  $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  и  $x = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi n = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**154а)** Запишем уравнение  $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$  в виде  $2\cos^2 x = 1 - \cos 4x$  и используем формулы понижения степени:  $1 + \cos 2x = 2\sin^2 2x$  или  $1 + \cos 2x = 2(1 - \cos^2 2x)$  или  $2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$ . Введем новую неизвестную  $t = \cos 2x$  и получим квадратное уравнение  $2t^2 + t - 1 = 0$ , корни которого  $t_1 = -1$  и  $t_2 = \frac{1}{2}$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем два уравнения:  $\cos 2x = -1$  (откуда  $2x = \pi + 2\pi n$  и  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ) и  $\cos 2x = \frac{1}{2}$  (тогда  $2x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi k = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$  и  $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Ответ:  $\frac{\pi}{2} + \pi n$ ;  $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

**155б)** В уравнении  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$  сгруппируем в левой части члены и разложим ее на множители:  $(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0$  или  $2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 0$  или  $\sin 2x(2\cos x + 1) = 0$ . Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Получаем два уравнения:  $\sin 2x = 0$  (тогда  $2x = \pi n$  и  $x = \frac{\pi}{2}n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ) и  $2\cos x + 1 = 0$  (тогда  $\cos x = -\frac{1}{2}$  и  $x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Ответ:  $\frac{\pi}{2}n$ ;  $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

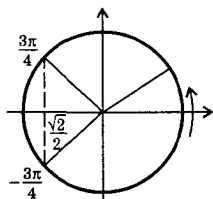
**156в)** Для решения уравнения  $\frac{15}{\sin x + 1} = 11 - 2\sin x$  введем новую неизвестную  $t = \sin x$  и получим уравнение:  $\frac{15}{t+1} = 11 - 2t$  или  $15 = 11t + 11 - 2t^2 - 2t$  или  $2t^2 - 9t + 4 = 0$ . Корни этого квадратного уравнения  $t_1 = \frac{1}{2}$  и  $t_2 = 4$  (не подходит, т.к.  $t \leq 1$ ). Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Получаем уравнение  $\sin x = \frac{1}{2}$ , решения которого  $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**157а)** При решении уравнения  $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 0$  запишем тангенсы через синусы и косинусы:  $\frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{\sin x}{\cos x} = 0$  или  $\frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\cos 3x \cos x} = 0$  или  $\frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos x} = 0$  или  $\frac{2 \sin x \cos x}{\cos 3x \cos x} = 0$  или  $\frac{\sin x}{\cos 3x} = 0$ . Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, т.е.  $\sin x = 0$ , откуда  $x = \pi n$  (где  $n \in \mathbb{Z}$ ). Ответ:  $\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**158а)** Для решения уравнения  $\arccos \frac{1+2x}{3} = \frac{2\pi}{3}$  используем определения арккосинуса и получим:  $\frac{1+2x}{3} = \cos \frac{2\pi}{3}$  или  $\frac{1+2x}{3} = -\frac{1}{2}$  или  $2+4x = -3$  или  $4x = -5$ , откуда  $x = -\frac{5}{4}$ . Ответ:  $-\frac{5}{4}$ .

**159а)** При решении неравенства  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$  используем формулу приведения и получим:  $-\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Умножим обе части на отрицательное число  $(-1)$ . Знак неравенства меняется на



противоположный:  $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Решим это неравенство с помощью тригонометрического круга. На оси косинусов отложим значение  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  и построим соответствующие углы  $x = \pm \frac{3\pi}{4}$ , для которых  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Видно, что решением неравенства будут значения  $-\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ . Учтем периодичность функции косинус и

получим решение данного неравенства  $x \in \left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right]$ ,

где  $n \in \mathbb{Z}$ . Ответ:  $\left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**160а)** Для решения неравенства  $2\sin^2 x \leq 1$  используем формулу понижения степени:  $1 - \cos 2x \leq 1$  или  $-\cos 2x \leq 0$ . Умножим обе части на отрицательное число  $(-1)$ . При этом знак неравенства меняется на противоположный. Имеем  $\cos 2x \geq 0$ . Решая это неравенство, например, с помощью тригонометрического круга, получим

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ , откуда  $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**161а)** Неравенство  $|\cos x - 1| \leq 0,5$  эквивалентно двойному неравенству  $-0,5 \leq \cos x - 1 \leq 0,5$ . Ко всем частям прибавим число 1 и получим неравенство  $0,5 \leq \cos x \leq 1,5$ . Правая часть неравенства выполняется при всех  $x$ . Поэтому двойное неравенство эквивалентно неравенству  $\cos x \geq 0,5$ . Решая это неравенство, получим  $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**162б)** ОДЗ неравенства  $\log_{0,5} \sin x > 1$  задается условием  $\sin x > 0$ . Запишем неравенство в виде  $\log_{0,5} \sin x > \log_{0,5} 0,5$ . Так как основание логарифмов 0,5 меньше единицы (логарифмическая функция убывающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством противоположного знака  $\sin x < 0,5$ . Таким образом, данное неравенство эквивалентно двойному неравенству  $0 < \sin x < 0,5$ . Решая это неравенство, находим  $x \in \left[2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right]$ , где

$n \in \mathbb{Z}$ . Ответ:  $\left[2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**163а)** Используя свойства степеней, запишем правую часть уравнения  $0,2^{x^2-16x-37,5} = 5\sqrt{5}$  в виде степени числа  $\frac{1}{5} = 0,2$ . Получаем:  $0,2^{x^2-16x-37,5} = 5^{\frac{3}{2}} = 0,2^{-1,5}$ . Так как равны степени (с одинаковым основанием 0,2), то равны и показатели степеней:  $x^2 - 16x - 37,5 = -1,5$  или  $x^2 - 16x - 36 = 0$ . Корни этого квадратного уравнения  $x_1 = 18$  и  $x_2 = -2$ . Ответ: 18; -2.

**164а)** Для решения уравнения  $5^{3x} - 2 \cdot 5^{3x-1} - 3 \cdot 5^{3x-2} = 60$  в правой части вынесем множитель  $5^{3x-2}$  за скобки:  $5^{3x-2}(5^2 - 2 \cdot 5 - 3) = 60$  или  $5^{3x-2} \cdot 12 = 60$  или  $5^{3x-2} = 5$ , откуда  $3x - 2 = 1$  и  $x = 1$ .

Ответ: 1.

**165б)** Запишем уравнение  $5^{3x+1} + 34 \cdot 5^{2x} = 7 \cdot 5^x$  в виде  $5 \cdot (5^x)^3 + 34 \cdot (5^x)^2 = 7 \cdot 5^x$  и введем новую неизвестную  $t = 5^x > 0$ . Получаем кубическое уравнение  $5t^3 + 34t^2 = 7t$  или  $5t^3 + 34t^2 - 7t = 0$ . Так как  $t \neq 0$ , то разделим все члены на  $t$  и получим квадратное урав-

нение  $5t^2 + 34t - 7 = 0$ . Корни этого уравнения  $t_1 = \frac{1}{5}$  и  $t_2 = -7$  (не подходит, т.к.  $t > 0$ ). Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем уравнение  $5^x = \frac{1}{5}$ , откуда  $x = -1$ . **Ответ:**  $-1$ .

**166г)** Все члены уравнения  $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$  разделим на выражение  $36^x \neq 0$ . Получаем:  $3 \cdot \left(\frac{16}{36}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{81}{36}\right)^x = 5$  или  $3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x = 5$ . Введем новую неизвестную  $t = \left(\frac{4}{9}\right)^x > 0$  и получим уравнение:  $3t + \frac{2}{t} = 5$  или  $3t^2 - 5t + 2 = 0$ , корни которого  $t_1 = 1$  и  $t_2 = \frac{2}{3}$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем уравнения:  $\left(\frac{4}{9}\right)^x = 1$  (откуда  $x = 0$ ) и  $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$  (тогда  $x = \frac{1}{2}$ ). **Ответ:**  $0; \frac{1}{2}$ .

**167в)** Используем основное тригонометрическое тождество и запишем уравнение  $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$  в виде:  $2^{\sin^2 x} + 2^{1-\sin^2 x} = 3$  или  $2^{\sin^2 x} + \frac{2}{2^{\sin^2 x}} = 3$ . Введем новую неизвестную  $t = 2^{\sin^2 x} > 0$  и получим уравнение:  $t + \frac{2}{t} = 3$  или  $t^2 - 3t + 2 = 0$ . Корни этого квадратного уравнения  $t_1 = 1$  и  $t_2 = 2$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Получаем уравнения:  $2^{\sin^2 x} = 1$  (тогда  $\sin^2 x = 0$  или  $\sin x = 0$ , откуда  $x = \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ) и  $2^{\sin^2 x} = 2$  (тогда  $\sin^2 x = 1$  или  $\sin x = \pm 1$ , откуда  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ). Решения  $x = \pi n$  и  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$  можно объединить формулой  $x = \frac{\pi}{2} m$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ .

**Ответ:**  $\frac{\pi}{2} m$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ .

**168а)** Для решения неравенства  $\frac{16}{\sqrt{32}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3+x}$  запишем его левую часть в виде степени числа  $\frac{1}{2}$ :  $\frac{16}{\sqrt{32}} = \frac{2^4}{\sqrt{2^5}} = \frac{2^4}{2^{\frac{5}{2}}} = 2^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$ . Тогда данное неравенство имеет вид:  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3+x}$ . Так как основание степеней  $\frac{1}{2}$  меньше единицы (показательная функция убы-

вающая), то показатели степеней связаны неравенством противоположного знака:  $-\frac{3}{2} \geq 3 + x$ , откуда  $x \geq -\frac{9}{2}$ . Ответ:  $\left[-\frac{9}{2}; \infty\right)$ .

**169а)** Неравенство  $0,04^x - 26 \cdot 0,2^x + 25 \leq 0$  запишем в виде  $(0,2^x)^2 - 26 \cdot 0,2^x + 25 \leq 0$  и введем новую неизвестную  $t = 0,2^x$ . Получаем квадратное неравенство  $t^2 - 26t + 25 \leq 0$ , решение которого  $1 \leq t \leq 25$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$  и получим неравенство:  $1 \leq 0,2^x \leq 25$  или  $5^0 \leq 5^{-x} \leq 5^2$ . Так как основание степеней 5 больше единицы (показательная функция возрастающая), то показатели степеней связаны неравенством того же знака:  $0 \leq -x \leq 2$ . Умножим все части неравенства на отрицательное число  $(-1)$ . При этом знак неравенства меняется на противоположный:  $0 \geq x \geq -2$ .

Ответ:  $[-2; 0]$ .

**170а)** Так как  $3^x > 0$  при любых значениях  $x$ , то разделим все члены неравенства  $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \leq 0$  на выражение  $3^x$ . Знак неравенства сохраняется, и получаем квадратное неравенство  $x^2 - 3 \leq 0$ , решение которого  $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ . Ответ:  $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ .

**170г)** Для решения неравенства  $2^{x^2-2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x-1} - 5^{x+2}$  разложим его части на множители:  $2^{x^2-2}(1 - 2 - 2^2) > 5^{x-1}(1 - 5)$  или  $2^{x^2-2}(-5) > 5^{x-1}(-4)$ . Умножим обе части на отрицательное число  $(-1)$ . Знак неравенства меняется на противоположный  $2^{x^2-2} \cdot 5 < 5^{x-1} \cdot 4$ . Разделим обе части на положительное число  $2^2 \cdot 5$  и получим:  $\frac{2^{x^2-2} \cdot 5}{2^2 \cdot 5} < \frac{5^{x-1} \cdot 4}{2^2 \cdot 5}$  или  $2^x < 5^x$ . Разделим обе части на положительное выражение  $5^x$ . Имеем:  $\frac{2^x}{5^x} < 1$  или  $\left(\frac{2}{5}\right)^x < \left(\frac{2}{5}\right)^0$ . Так

как основание степеней  $\frac{2}{5}$  меньше единицы (показательная функция убывающая), то показатели степеней связаны неравенством противоположного знака:  $x > 0$ . Ответ:  $(0; \infty)$ .

**171а)** При решении уравнения  $\log_3^2 x = 4 - 3\log_3 x$  введем новую неизвестную  $t = \log_3 x$  и получим квадратное уравнение:  $t^2 = 4 - 3t$  или  $t^2 + 3t - 4 = 0$ , корни которого  $t_1 = 1$  и  $t_2 = -4$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Получаем уравнения:  $\log_3 x = 1$  (тогда по определению  $x = 3^1 = 3$ ) и  $\log_3 x = -4$  (тогда  $x = 3^{-4} = \frac{1}{81}$ ).

Ответ:  $3; \frac{1}{81}$ .

**171в)** ОДЗ уравнения  $\log_3 \sqrt{x-5} + \log_3 \sqrt{2x-3} = 1$  определяется условиями:  $x - 5 > 0$  и  $2x - 3 > 0$ , откуда  $x > 5$ . Используя свойства

логарифма, получаем:  $\log_3(\sqrt{x-5} \cdot \sqrt{2x-3}) = 1$  или  $\sqrt{(x-5)(2x-3)} = 3$ . Возведем в квадрат обе части этого уравнения:  $(x-5)(2x-3) = 9$  или  $2x^2 - 13x + 6 = 0$ . Корни квадратного уравнения  $x_1 = 6$  и  $x_2 = \frac{1}{2}$  (не входит в ОДЗ). Ответ: 6.

**1726)** Уравнение  $\lg(3^x + x - 17) = x \lg 30 - x$  запишем в виде:  $\lg(3^x + x - 17) = \lg 30^x - \lg 10^x$  или  $\lg(3^x + x - 17) = \lg \frac{30^x}{10^x}$  или  $\lg(3^x + x - 17) = \lg 3^x$ , откуда  $3^x + x - 17 = 3^x$  и  $x = 17$ . Ответ: 17.

**1736)** В уравнении  $\log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{\frac{1}{3}} x = 6$  вычислим  $\log_{\sqrt{x}} x = 2$  и перейдем к основанию 3. Получаем:  $\log_3 x + 2 - \frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}} = 6$  или  $\log_3 x + 2 + \log_3 x = 6$  или  $2\log_3 x = 4$  или  $\log_3 x = 2$ . Тогда по определению логарифма  $x = 3^2 = 9$ . Ответ: 9.

**1746)** Прологарифмируем обе части уравнения  $x^{\log_5 x} = 125x^2$  по основанию 5. Получаем:  $\log_5 x^{\log_5 x} = \log_5(125x^2)$  или  $\log_5 x \cdot \log_5 x = \log_5 125 + \log_5 x^2$  или  $\log_5^2 x = 3 + 2\log_5 x$ . Введем новую неизвестную  $t = \log_5 x$  и получим квадратное уравнение:  $t^2 = 3 + 2t$  или  $t^2 - 2t - 3 = 0$ . Корни этого уравнения  $t_1 = -1$  и  $t_2 = 3$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем уравнения:  $\log_5 x = -1$  (тогда  $x = 5^{-1} = \frac{1}{5}$ ) и  $\log_5 x = 3$  (откуда  $x = 5^3 = 125$ ). Ответ:  $\frac{1}{5}$ ; 125.

**175а)** Для решения уравнения  $3\log_2^2 \sin x + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$  используем формулу понижения степени и свойства логарифмов. Получаем:  $3\log_2^2 \sin x + \log_2(2\sin^2 x) = 2$  или  $3\log_2^2 \sin x + \log_2 2 + \log_2 \sin^2 x = 2$  или  $3\log_2^2 \sin x + 1 + 2\log_2 \sin x = 2$  или  $3\log_2^2 \sin x + 2\log_2 \sin x - 1 = 0$ . Введем новую неизвестную  $t = \log_2 \sin x$  и получим квадратное уравнение  $3t^2 + 2t - 1 = 0$ , корни которого  $t_1 = -1$  и  $t_2 = \frac{1}{3}$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем два уравнения.

а)  $\log_2 \sin x = -1$ , тогда  $\sin x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$  и  $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

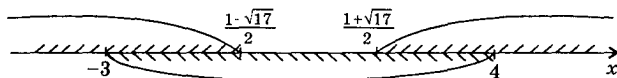
б)  $\log_2 \sin x = \frac{1}{3}$ , тогда  $\sin x = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ . Это уравнение решений не имеет, т.к.  $\sin x \leq 1$ .

Ответ:  $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**176а)** ОДЗ неравенства  $\log_2(x^2 - x - 4) < 3$  определяется условием  $x^2 - x - 4 > 0$ . Запишем неравенство в виде  $\log_2(x^2 - x - 4) < \log_2 8$ . Так как основание логарифмов 2 больше единицы (логарифмическая функция возрастающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством того же знака  $x^2 - x - 4 < 8$ . Таким образом, данное неравенство эквивалентно системе квадратных неравенств

$$\begin{cases} x^2 - x - 4 > 0 \\ x^2 - x - 4 < 8 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 - x - 4 > 0 \\ x^2 - x - 12 < 0 \end{cases}. \text{ Решение первого неравенства}$$

$x \in \left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}; \infty\right)$  изображено на диаграмме сверху.



Решение второго неравенства  $x \in (-3; 4)$  изображено снизу. Видно, что система неравенств (а, следовательно, и данное неравенство) выполняется при  $x \in \left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}; \infty\right)$ .

$$\text{полняется при } x \in \left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}; \infty\right).$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}; \infty\right).$$

**177б)** ОДЗ неравенства  $\log_{\frac{1}{6}}(10 - x) + \log_{\frac{1}{6}}(x - 3) \geq -1$  задается условиями:  $10 - x > 0$  и  $x - 3 > 0$ , откуда  $x \in (3; 10)$ . Используя свойства логарифмов, запишем неравенство в виде  $\log_{\frac{1}{6}}((10 - x) \times (x - 3)) \geq \log_{\frac{1}{6}} 6$ . Так как основание логарифмов  $\frac{1}{6}$  меньше единицы (логарифмическая функция убывающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством противоположного знака:  $(10 - x)(x - 3) \leq 6$  или  $10x - 30 - x^2 + 3x \leq 6$  или  $0 \leq x^2 - 13x + 36$ . Решение этого квадратного неравенства  $x \in (-\infty; 4] \cup [9; \infty)$ . С учетом ОДЗ получаем решение данного неравенства  $x \in (3; 4] \cup [9; 10)$ .

**Ответ:**  $(3; 4] \cup [9; 10)$ .

**180а)** Систему линейных неравенств  $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$  решим методом подстановки. Из первого уравнения выразим  $y = \frac{-1 - 2x}{3}$  и

подставим во второе:  $5x + 4 \cdot \frac{-1 - 2x}{3} = 1$ . Умножим все члены

уравнения на 3 и получим:  $15x - 4 - 8x = 3$  или  $7x = 7$ , откуда  $x = 1$ .

Теперь найдем  $y = \frac{-1 - 2x}{3} = \frac{-1 - 2 \cdot 1}{3} = -1$ . **Ответ:** (1; -1).

**181a)** В системе уравнений  $\begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$  сначала упростим пер-

вое уравнение. Для этого введем новую неизвестную  $t = \frac{y}{x}$  и полу-

чим уравнение:  $t + \frac{1}{t} = \frac{13}{6}$  или  $6t^2 - 13t + 6 = 0$ . Корни этого уравнения  $t_1 = \frac{3}{2}$  и  $t_2 = \frac{2}{3}$ . Вернемся к старым неизвестным. Имеем две системы уравнений.

а)  $\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \\ x + y = 5 \end{cases}$  или  $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ x + y = 5 \end{cases}$ . Подставим первое уравнение во

второе:  $x + \frac{3}{2}x = 5$  или  $\frac{5}{2}x = 5$ , откуда  $x = 2$ . Тогда  $y = \frac{3}{2}x = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$ .

б)  $\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{2}{3} \\ x + y = 5 \end{cases}$  или  $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ x + y = 5 \end{cases}$ . Подставим первое уравнение во

второе:  $x + \frac{2}{3}x = 5$  или  $\frac{5}{3}x = 5$ , откуда  $x = 3$ . Тогда  $y = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$ .

Таким образом, система имеет два решения (2; 3) и (3; 2).

**Ответ:** (2; 3), (3; 2).

**1826)** Разложим левые части уравнений системы

$$\begin{cases} x^2y^3 + x^3y^2 = 12 \\ x^2y^3 - x^3y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{на множители} \quad \begin{cases} x^2y^2(y+x) = 12 \\ x^2y^2(y-x) = 4 \end{cases} \quad \text{и разделим}$$

уравнения почленно друг на друга:  $\frac{x^2y^2(y+x)}{x^2y^2(y-x)} = \frac{12}{4}$  или  $\frac{y+x}{y-x} = 3$

или  $y + x = 3y - 3x$  или  $4x = 2y$ , откуда  $y = 2x$ . Подставим это соотношение, например, в первое уравнение:  $x^2 \cdot (2x)^3 + x^3(2x)^2 = 12$  или  $8x^5 + 4x^5 = 12$ , откуда  $x^5 = 1$  и  $x = 1$ . Тогда  $y = 2x = 2 \cdot 1 = 2$ .

**Ответ:** (1; 2).

183а) Для решения системы уравнений  $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x^3 y^3 = -8 \end{cases}$  введем но-

вые неизвестные  $t = x^3$  и  $z = y^3$ . Получаем систему  $\begin{cases} t + z = 7 \\ tz = -8 \end{cases}$ . Из первого уравнения выразим  $z = 7 - t$  и подставим во второе:  $t(7 - t) = -8$  или  $0 = t^2 - 7t - 8$ . Корни этого квадратного уравнения  $t_1 = -1$  (тогда  $z_1 = 8$ ) и  $t_2 = 8$  (тогда  $z_2 = -1$ ). Вернемся к старым неизвестным  $x$  и  $y$ . Получаем две системы уравнений.

$$\text{а) } \begin{cases} x^3 = -1 \\ y^3 = 8 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x = \sqrt[3]{-1} = -1 \\ y = \sqrt[3]{8} = 2 \end{cases}.$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^3 = 8 \\ y^3 = -1 \end{cases}, \text{ тогда } \begin{cases} x = \sqrt[3]{8} = 2 \\ y = \sqrt[3]{-1} = -1 \end{cases}.$$

Ответ:  $(-1; 2)$ ,  $(2; -1)$ .

184а) Для решения системы линейных уравнений  $\begin{cases} x - 5y = 7 \\ ax - y = -3 \end{cases}$

из первого уравнения выразим  $x = 5y + 7$  и подставим во второе:  $a(5y + 7) - y = -3$  или  $5ay + 7a - y = -3$  или  $y(5a - 1) = -7a - 3$ .

Если коэффициент при  $y$  не равен нулю (т.е.  $5a - 1 \neq 0$  или  $a \neq \frac{1}{5}$ ), то уравнение (следовательно, и данная система) имеет единственное решение. Если  $a = \frac{1}{5}$ , то подставим это значение в уравнение и получим  $y \cdot 0 = -\frac{7}{5} - 3$ . Очевидно, что это уравнение (и данная система) решений не имеет.

Ответ: при  $a \neq \frac{1}{5}$  — единственное решение, при  $a = \frac{1}{5}$  — решений нет.

185а) Для решения системы неравенств  $\begin{cases} 2x > 3 - \frac{13x - 2}{11} \\ \frac{x}{6} + \frac{2}{3}(x - 7) < \frac{3x - 20}{9} \end{cases}$

решим каждое из неравенств и найдем значения  $x$ , удовлетворяющие сразу обоим неравенствам. Умножим первое неравенство на положительное число 11, второе неравенство — на положительное число 18. При этом знаки неравенств сохраняются. Получаем:

$$\begin{cases} 22x > 33 - 13x + 2 \\ 3x + 12x - 84 < 6x - 40 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 35x > 35 \\ 9x < 44 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{44}{9} = 4\frac{8}{9} \end{cases}. \text{ Тог-}$$

да решение системы неравенств  $x \in \left(1; 4\frac{8}{9}\right)$ . Ответ:  $\left(1; 4\frac{8}{9}\right)$

**187а)** Для решения системы уравнений  $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \end{cases}$  введем новые неизвестные  $z = \sqrt{x}$  и  $t = \sqrt{y}$  (тогда  $z^2 = x$  и  $t^2 = y$ ). Получаем систему уравнений  $\begin{cases} z^2t + zt^2 = 30 \\ z + t = 5 \end{cases}$  или  $\begin{cases} zt(z+t) = 30 \\ z + t = 5 \end{cases}$ . Разделим первое уравнение на второе:  $\frac{zt(z+t)}{z+t} = \frac{30}{5}$  или  $zt = 6$ . Теперь

имеем систему уравнений  $\begin{cases} zt = 6 \\ z + t = 5 \end{cases}$ . Из второго уравнения выразим  $z = 5 - t$  и подставим в первое:  $(5 - t)t = 6$  или  $0 = t^2 - 5t + 6$ . Корни этого уравнения  $t_1 = 2$  и  $t_2 = 3$ , тогда  $z_1 = 5 - t_1 = 3$  и  $z_2 = 2$ . Вернемся к старым неизвестным  $x$  и  $y$  и получим две системы.

$$\text{а) } \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{y} = 2 \end{cases}, \text{ тогда } \begin{cases} x = 3^2 = 9 \\ y = 2^2 = 4 \end{cases}.$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{y} = 3 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases}.$$

Ответ: (9; 4), (4; 9).

**189а)** Для решения системы уравнений  $\begin{cases} \sin x \cos y = 0,25 \\ \sin y \cos x = 0,75 \end{cases}$  сложим и вычтем уравнения системы. Получаем:

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = 1 \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = -0,5 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sin(x+y) = 1 \\ \sin(x-y) = -\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ откуда}$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x - y = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} - \pi k \end{cases}. \text{ Сложим и вычтем уравнения этой системы}$$

$$\text{мы } \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n + (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k \\ 2y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n - (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} - \pi k \end{cases}, \text{ откуда}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n + (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} k \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi n - (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} k \end{cases}, \text{ где } n, k \in \mathbb{Z}.$$

**Ответ:**  $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n + (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} k; \frac{\pi}{4} + \pi n + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} k\right)$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

**189г)** Сложим уравнения системы  $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y \\ \cos^2 x = \sin x \sin y \end{cases}$  и получим:  $\sin^2 x + \cos^2 x = \cos x \cos y + \sin x \sin y$  или  $1 = \cos(x - y)$ , откуда  $x - y = 2\pi n$ . Выразим  $x = y + 2\pi n$  и подставим в первое уравнение:  $\sin^2(y + 2\pi n) = \cos(y + 2\pi n) \cos y$  или  $\sin^2 y = \cos^2 y$  или  $0 = \cos^2 y - \sin^2 y$  или  $0 = \cos 2y$ . Решения этого уравнения  $2y = \frac{\pi}{2} + \pi k$  и  $y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k$ . Тогда  $x = y + 2\pi n = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k + 2\pi n$ .

**Ответ:**  $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} k + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k\right)$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

**190б)** Из первого уравнения системы  $\begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{2} \\ \sin x + \cos 2y = -1 \end{cases}$  выразим  $x = \frac{5\pi}{2} - y$  и подставим во второе:  $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - y\right) + \cos 2y = -1$  или  $\cos y + 1 + \cos 2y = 0$  или  $\cos y + 2\cos^2 y = 0$  или  $\cos y(1 + 2\cos y) = 0$ . Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем две системы уравнений.

$$\text{а) } \begin{cases} x = \frac{5\pi}{2} - y \\ \cos y = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \frac{5\pi}{2} - y \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x = 2\pi - \pi n \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = \frac{5\pi}{2} - y \\ 1 + 2\cos y = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \frac{5\pi}{2} - y \\ \cos y = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - y \\ y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}, \text{ откуда}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{2} \mp \frac{2\pi}{3} - 2\pi k \\ y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

**Ответ:**  $\left(2\pi - \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \left(\frac{5\pi}{2} \mp \frac{2\pi}{3} - 2\pi k; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

**191а)** Систему уравнений  $\begin{cases} 9^{x+y} = 729 \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{cases}$  запишем в виде

$$\begin{cases} 9^{x+y} = 9^3 \\ 3^{x-y-1} = 3^0, \text{ откуда } \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \end{cases} \text{ Сложим и вычтем}$$

эти линейные уравнения и получим:  $2x = 4$  (тогда  $x = 2$ ) и  $2y = 2$  (откуда  $y = 1$ ). Ответ: (2; 1).

**191г)** Из второго уравнения системы  $\begin{cases} 3^x + 3^y = 28 \\ x - y = 3 \end{cases}$  выразим  $x = y + 3$  и подставим в первое:  $3^{y+3} + 3^y = 28$  или  $3^y(3^3 + 1) = 28$  или  $3^y \cdot 28 = 28$  или  $3^y = 1$ , откуда  $y = 0$ . Тогда  $x = y + 3 = 3$ .

Ответ: (3; 0).

**192б)** Для решения системы уравнений  $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17 \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 5 \end{cases}$  запишем ее в виде  $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17 \\ 4 \cdot 2^x - 3 \cdot 3^y = 5 \end{cases}$ . Введем новые неизвестные  $z = 2^x$

и  $t = 3^y$ . Тогда система имеет вид  $\begin{cases} z + t = 17 \\ 4z - 3t = 5 \end{cases}$ . Из первого уравнения выразим  $z = 17 - t$  и подставим во второе:  $4(17 - t) - 3t = 5$  или  $68 - 4t - 3t = 5$  или  $63 = 7t$ , откуда  $t = 9$ . Тогда  $z = 17 - 9 = 8$ . Вернемся к старым неизвестным  $x$  и  $y$ . Получаем систему уравне-

ний:  $\begin{cases} 2^x = 8 \\ 3^y = 9 \end{cases}$  или  $\begin{cases} 2^x = 2^3 \\ 3^y = 3^2 \end{cases}$ , откуда  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ . Ответ: (3; 2).

**194а)** При решении системы уравнений  $\begin{cases} \lg x - \lg y = 1 \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5 \end{cases}$  введем новые неизвестные  $z = \lg x$  и  $t = \lg y$ . Получаем систему уравнений  $\begin{cases} z - t = 1 \\ z^2 + t^2 = 5 \end{cases}$ . Из первого уравнения выразим  $z = t + 1$  и подставим во второе:  $(t + 1)^2 + t^2 = 5$  или  $t^2 + 2t + 1 + t^2 = 5$  или  $t^2 + t - 2 = 0$ . Корни этого квадратного уравнения  $t_1 = 1$  (тогда  $z_1 = t_1 + 1 = 2$ ) и  $t_2 = -2$  (тогда  $z_2 = t_2 + 1 = -1$ ). Вернемся к старым неизвестным  $x$  и  $y$ . Получаем две системы уравнений.

а)  $\begin{cases} \lg x = 2 \\ \lg y = 1 \end{cases}$ , откуда по определению логарифма  $\begin{cases} x = 10^2 = 100 \\ y = 10^1 = 10 \end{cases}$ .

б)  $\begin{cases} \lg x = -2 \\ \lg y = -1 \end{cases}$ , тогда  $\begin{cases} x = 10^{-2} = \frac{1}{100} \\ y = 10^{-1} = \frac{1}{10} \end{cases}$ .

Ответ: (100; 10),  $\left(\frac{1}{100}; \frac{1}{10}\right)$ .

1946) Используя свойства логарифмов, преобразуем уравнения

$$\text{системы } \begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5 \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4 \end{cases} \cdot \text{Получаем: } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2^5 \\ \frac{2\log_2 x}{\log_2 4} + \log_2 y = 4 \text{ или} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 32 \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \text{ или} \end{cases} \begin{cases} x^2 + y^2 = 32 \\ \log_2(xy) = 4 \text{ или} \end{cases} \begin{cases} x^2 + y^2 = 32 \\ xy = 16 \end{cases} \cdot \text{Умножим}$$

второе уравнение системы на 2 и вычтем из первого. Имеем:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 32 \\ 2xy = 32 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 0 \\ xy = 16 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ xy = 16 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-y=0 \\ xy=16 \end{cases}.$$

Из первого уравнения выразим  $y = x$  и подставим во второе:  $x \cdot x = 16$  или  $x^2 = 16$ . Учтем, что  $x > 0$ , и найдем  $x = 4$  (тогда  $y = 4$ ).

Ответ: (4; 4).

1956) Преобразуем уравнения системы

$$\begin{cases} 3^{1+\log_3(x^2+y^2)} = 15 \\ \log_3(x^2-y^2) - \log_3(x-y) = 0 \end{cases} \cdot \text{Получаем } \begin{cases} 3^1 \cdot 3^{\log_3(x^2+y^2)} = 15 \\ \log_3(x^2-y^2) = \log_3(x-y) \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = x - y \end{cases} \cdot \text{Так как } x - y \neq 0, \text{ то разделим обе части второ-}$$

го уравнения на выражение  $(x - y)$ . Имеем систему уравнений  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$ . Из второго уравнения выразим  $y = 1 - x$  и подставим в первое:  $x^2 + (1 - x)^2 = 5$  или  $x^2 - x - 2 = 0$ . Корни этого квадратного уравнения  $x_1 = -1$  (тогда  $y_1 = 1 - x_1 = 2$ ) и  $x_2 = 2$  (тогда  $y_2 = -1$ ). Очевидно, что решение  $(-1; 2)$  не подходит, т.к.  $x - y < 0$ . Таким образом, система имеет единственное решение  $(2; -1)$ . Ответ: (2; -1).

197) Пусть  $x$  (км/ч) — скорость автобуса по старому расписанию. Тогда расстояние 325 км он проходит за время  $\frac{325}{x}$  часов. По новому расписанию скорость автобуса на 10 км/ч больше, т.е.  $x + 10$  (км/ч). Тогда это же расстояние он проходит за время  $\frac{325}{x+10}$  часов. По условию время движения по новому расписанию стало на 40 минут ( $\frac{2}{3}$  часа) меньше. Поэтому получаем уравнение:

$$\frac{325}{x+10} = \frac{325}{x} - \frac{2}{3} \cdot \text{Умножим все члены на выражение } 3x(x+10).$$

Имеем:  $325 \cdot 3x = 325 \cdot 3(x+10) - 2x(x+10)$  или  $975x = 975x + 9750 - 2x^2 - 20x$  или  $x^2 + 10x - 4875 = 0$ . Корни этого квадратного урав-

нения  $x_1 = 65$  и  $x_2 = -75$  (не подходит). Тогда скорость автобуса по новому расписанию  $65 + 10 = 75$  (км/ч). Ответ: 75 км/ч.



**200)** Теплоходы движутся по перпендикулярным направлениям. Пусть скорость одного  $x$  (км/ч), другого —  $x + 6$  (км/ч) и  $A$  — место встречи теплоходов. Тогда за 2 часа после встречи один теплоход прошел расстояние  $AB = 2x$ , другой — расстояние  $AC = 2(x + 6)$ . По условию расстояние между теплоходами  $BC = 60$  (км). Для  $\triangle ABC$  запишем теорему Пифагора:  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  или  $60^2 = 4x^2 + 4(x + 6)^2$  или  $900 = x^2 + x^2 + 12x + 36$  или  $0 = x^2 + 6x - 432$ . Корни этого квадратного уравнения  $x_1 = 18$  и  $x_2 = -24$  (не подходит). Тогда скорость другого теплохода  $18 + 6 = 24$  (км/ч).

Ответ: 18 и 24 км/ч.

**203)** Пусть надо посадить  $A$  деревьев, первая бригада ежедневно сажала  $x$  деревьев, вторая —  $y$  деревьев. Так как две бригады за 4 дня посадили все деревья, то имеем первое уравнение:  $4x + 4y = A$ . Первая бригада может посадить все деревья за  $\frac{A}{x}$  дней, вторая бригада — за  $\frac{A}{y}$  дней. Известно, что первая бригада затратит на посадку деревьев на 6 дней меньше. Получаем второе уравнение:  $\frac{A}{x} = \frac{A}{y} - 6$ .

Имеем систему уравнений 
$$\begin{cases} 4x + 4y = A \\ \frac{A}{x} = \frac{A}{y} - 6 \end{cases}$$
 . Подставим первое

уравнение во второе:  $\frac{4x + 4y}{x} = \frac{4x + 4y}{y} - 6$  или  $4 + 4\frac{y}{x} = 4\frac{x}{y} + 4 - 6$

или  $0 = 2\frac{x}{y} - 2\frac{y}{x} - 3$ . Введем новую неизвестную  $t = \frac{x}{y}$  и получим

уравнение:  $0 = 2t - 2 \cdot \frac{1}{t} - 3$  или  $0 = 2t^2 - 3t - 2$ . Корни этого квадратного уравнения  $t_1 = 2$  и  $t_2 = -\frac{1}{2}$  (не подходит). Итак,  $\frac{x}{y} = 2$ , откуда

$x = 2y$ . Подставим эту величину в первое уравнение:  $4 \cdot 2y + 4y = A$ , откуда  $A = 12y$ . Тогда вторая бригада может посадить все деревья за  $\frac{A}{y} = \frac{12y}{y} = 12$  дней, а первая — на 6 дней быстрее, т.е.  $12 - 6 = 6$  дней.

Ответ: 6 дней и 12 дней.

205) Пусть первый кусок латуни весит  $x$  (кг) и содержит 5 кг чистой меди. Тогда процентное содержание меди в этом куске  $\frac{5}{x} \cdot 100$ . Второй кусок латуни весит  $30 - x$  (кг) и содержит 4 кг чистой меди. Процентное содержание меди в этом куске  $\frac{4}{30 - x} \cdot 100$ . Процентное содержание меди во втором куске на 15% больше, чем в первом. Получаем уравнение:  $\frac{400}{30 - x} = \frac{500}{x} + 15$  или  $\frac{80}{30 - x} = \frac{100}{x} + 3$ . Умножим все члены уравнения на выражение  $x(30 - x)$ . Имеем:  $80x = 100(30 - x) + 3x(30 - x)$  или  $80x = 3000 - 100x + 90x - 3x^2$  или  $x^2 + 30x - 1000 = 0$ . Корни этого квадратного уравнения  $x_1 = 20$  и  $x_2 = -50$  (не подходит). Теперь найдем процентное содержание меди в первом куске:  $\frac{5}{20} \cdot 100 = 25\%$ . Ответ: 25%.

208) Пусть  $v$  (м/с) — скорость поезда,  $L$  (м) — его длина. Так как поезд проходит мимо наблюдателя за 7 с, то получаем первое уравнение:  $L = 7 \cdot v$ . Мимо платформы длиной 378 м поезд проезжает за 25 с. Имеем второе уравнение:  $L + 378 = 25 \cdot v$ . Получаем систему линейных уравнений  $\begin{cases} L = 7v \\ L + 378 = 25v \end{cases}$ . Из второго уравнения вычтем первое:  $378 = 18v$ , откуда  $v = 21$  (м/с). Из первого уравнения найдем длину поезда  $L = 7 \cdot 21 = 147$  (м).

Ответ: 21 м/с, 147 м.

210) Пусть изготовлено  $x$  двигателей типа А и  $y$  двигателей типа В. Тогда на двигатели А затрачено  $2x$  (кг) меди, а на двигатели В —  $3y$  (кг) меди. Так как всего было израсходовано 130 кг меди, то получаем первое уравнение:  $2x + 3y = 130$ . На двигатели А затрачено  $x$  (кг) свинца, а на двигатели В —  $2y$  (кг) свинца. Так как было израсходовано 80 кг свинца, то имеем второе уравнение:  $x + 2y = 80$ . Получили систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 130 \\ x + 2y = 80 \end{cases} \quad \text{Из второго уравнения выразим } x = 80 - 2y \text{ и под-}$$

ставим в первое:  $2(80 - 2y) + 3y = 130$  или  $160 - 4y + 3y = 130$ , откуда  $y = 30$ . Тогда найдем  $x = 80 - 2y = 20$ . Ответ: 20; 30.

211) Пусть объем всего задания А (деталей). Для определенности будем считать, что изготавливаются детали. Пусть ежедневно первый рабочий делает  $x$  (деталей), второй рабочий —  $y$  (деталей). За 12 дней рабочие сделают  $12x + 12y$  деталей. Получаем первое уравнение:  $12x + 12y = A$ . Если половину задания делает первый

рабочий, то он затратит  $\frac{A}{2x}$  дней. На вторую половину задания второй рабочий затратит  $\frac{A}{2y}$  дней. Тогда задание будет выполнено за 25 дней. Имеем второе уравнение:  $\frac{A}{2x} + \frac{A}{2y} = 25$ . Получили

систему уравнений 
$$\begin{cases} 12x + 12y = A \\ \frac{A}{2x} + \frac{A}{2y} = 25 \end{cases}$$
. Подставим первое уравне-

ние во второе:  $\frac{12x + 12y}{2x} + \frac{12x + 12y}{2y} = 25$  или  $6 + 6\frac{y}{x} + 6\frac{x}{y} + 6 = 25$  или  $6\frac{y}{x} + 6\frac{x}{y} - 13 = 0$ . Введем новую переменную  $t = \frac{y}{x}$ . Тогда уравнение имеет вид:  $6t + \frac{6}{t} - 13 = 0$  или  $6t^2 - 13t + 6 = 0$ . Корни этого квадратного уравнения  $t_1 = \frac{3}{2}$  и  $t_2 = \frac{2}{3}$ . Рассмотрим два случая.

а)  $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$  или  $y = \frac{3}{2}x$ . Подставим это соотношение в первое уравнение:  $12x + 12 \cdot \frac{3}{2}x = A$  или  $30x = A$ . Тогда первый рабочий сделает работу за  $\frac{A}{x} = \frac{30x}{x} = 30$  дней. Так как производительность второго рабочего в  $\frac{3}{2}$  раза больше, то он сделает работу за  $\frac{30}{3/2} = 20$  дней.

б)  $\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$  или  $y = \frac{2}{3}x$ . Подставим это соотношение в первое уравнение:  $12x + 12 \cdot \frac{2}{3}x = A$  или  $20x = A$ . Тогда первый рабочий сделает задание за  $\frac{A}{x} = \frac{20x}{x} = 20$  дней. Так как производительность второго рабочего составляет  $\frac{2}{3}$  производительности первого, то он затратит  $\frac{20}{2/3} = 30$  дней. Ответ: 20 и 30 дней.

**215)** Пусть дано двузначное число  $10x + y$  (где  $x$  — цифра десятков,  $y$  — цифра единиц). Так как сумма квадратов цифр равна 13, то получаем первое уравнение  $x^2 + y^2 = 13$ . Если из данного числа  $10x + y$  вычесть 9, то получится число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, т.е.  $10y + x$ . Имеем второе уравнение:  $10x + y - 9 = 10y + x$ .

Получили систему уравнений 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 10x + y - 9 = 10y + x \end{cases}$$
 или

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x - 1 = y \end{cases}$$
. Подставим второе уравнение в первое:  $x^2 - (x-1)^2 = 13$

или  $x^2 + x^2 - 2x + 1 = 13$  или  $x^2 - x - 6 = 0$ . Корни этого квадратного уравнения  $x_1 = 3$  и  $x_2 = -2$  (не подходит). Тогда  $y = x - 1 = 2$ . Итак, данное число — 23. Ответ: 23.

### § 5. Производная, первообразная, интеграл и их применения

**218а)** Пусть аргумент функции  $f(x) = 1 - 4x$  изменился на  $\Delta x$  и стал равен  $x = x_0 + \Delta x = 3 + \Delta x$ . Найдем изменение функции  $\Delta f = f(x) - f(x_0) = 1 - 4 \cdot (3 + \Delta x) - (1 - 4 \cdot 3) = 1 - 12 - 4\Delta x - 1 + 12 = -4\Delta x$ .

Отношение приращения функции к приращению аргумента  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-4\Delta x}{\Delta x} = -4$  величина постоянная и не зависит от  $\Delta x$ . Тогда иско-  
мая производная равна  $(-4)$ . Ответ:  $-4$ .

**219в)** Используем правило нахождения производной от произведения функций. Получаем:  $f'(x) = ((x^2 + 5)(x^3 - 2x + 2))' = (x^2 + 5)' \times (x^3 - 2x + 2) + (x^2 + 5)(x^3 - 2x + 2)' = 2x(x^3 - 2x + 2) + (x^2 + 5)(3x^2 - 2) = 2x^4 - 4x^2 + 4x + 3x^4 - 2x^2 + 15x^2 - 10 = 5x^4 + 9x^2 + 4x - 10$ .

Ответ:  $5x^4 + 9x^2 + 4x - 10$ .

**220в)** Используем правило нахождения производной для частного функций. Получаем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{x^3 - 3x}{1 - 2x} \right)' = \frac{(x^3 - 3x)'(1 - 2x) - (x^3 - 3x)(1 - 2x)'}{(1 - 2x)^2} = \\ &= \frac{(3x^2 - 3)(1 - 2x) - (x^3 - 3x)(-2)}{(1 - 2x)^2} = \frac{3x^2 - 6x^3 - 3 + 6x + 2x^3 - 6x}{(1 - 2x)^2} = \\ &= \frac{-4x^3 + 3x^2 - 3}{(1 - 2x)^2}. \quad \text{Ответ: } \frac{-4x^3 + 3x^2 - 3}{(1 - 2x)^2}. \end{aligned}$$

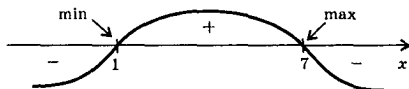
**222б)** Функцию  $f(x) = \sqrt[4]{1 + x^2} + \frac{1}{(2x - 1)^3}$  запишем в виде  $f(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{4}} + (2x - 1)^{-3}$ . Используем правило нахождения производной сложной функции. Имеем:  $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot (1 + x^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot (1 + x^2)' - 3 \cdot (2x - 1)^{-4} \cdot (2x - 1)' = \frac{1}{4} (1 + x^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2x - 3(2x - 1)^{-4} \cdot 2 = \frac{x}{2\sqrt[4]{(1 + x)^3}} - \frac{6}{(2x - 1)^4}$ . Ответ:  $\frac{x}{2\sqrt[4]{(1 + x)^3}} - \frac{6}{(2x - 1)^4}$ .

**223б)** Сначала найдем производную функции  $f(x) = 1,5\sin 2x - 5\sin x - x$ . Получаем:  $f'(x) = 1,5\cos 2x \cdot 2 - 5\cos x - 1 = 3\cos 2x - 5\cos x - 1$ . Приравняем производную нулю. Имеем тригонометрическое уравнение  $3\cos 2x - 5\cos x - 1 = 0$ . Для решения уравнения используем формулу понижения степени  $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ , откуда  $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ . Тогда уравнение имеет вид:  $3(2\cos^2 x - 1) - 5\cos x - 1 = 0$  или  $6\cos^2 x - 5\cos x - 4 = 0$ . Введем новую неизвестную  $t = \cos x$  и получим квадратное уравнение  $6t^2 - 5t - 4 = 0$ , корни которого  $t_1 = -\frac{1}{2}$  и  $t_2 = \frac{4}{3}$  (не подходит, т.к.  $\cos x \leq 1$ ). Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем уравнение  $\cos x = -\frac{1}{2}$ , откуда  $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

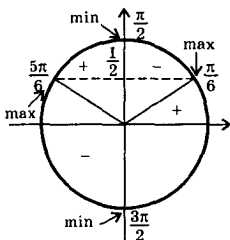
**230а)** Найдем производную функции  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 7x + 18$ .

Получаем:  $f'(x) = -\frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 4 \cdot 2x - 7 = -x^2 + 8x - 7$ . Приравняем производную нулю и найдем критические точки  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 7$ . На координатной оси отметим эти точки и построим диаграмму знаков производной  $f'(x)$ . Видно, что функция  $f(x)$  убывает на промежутках  $(-\infty; 1]$  и  $[7; \infty)$  и возрастает на промежутке  $[1; 7]$ . Точка



$x = 1$  — точка минимума, точка  $x = 7$  — точка максимума функции  $f(x)$ .

Ответ: промежутки убывания  $(-\infty; 1]$  и  $[7; \infty)$ ; промежутков возрастания  $[1; 7]$ ,  $x = 1$  — точка минимума,  $x = 7$  — точка максимума.

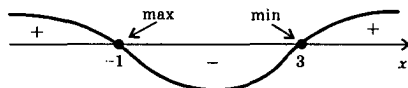


**231в)** Найдем производную функции  $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ . Получаем:  $f'(x) = 2\cos x - \sin 2x \cdot 2 = 2\cos x - 4\sin x \cos x = 2\cos x(1 - 2\sin x)$ . Приравняем производную нулю и найдем критические точки сначала на промежутке  $[0; 2\pi]$ :  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{5\pi}{6}$  и  $x = \frac{3\pi}{2}$ . Определим, например, знак производной  $f'(x)$  при  $x = 0$ :

$f'(0) = 2\cos 0 \cdot (1 - 2\sin 0) = 2 > 0$ . Тогда легко изобразить знаки производной и точки максимума и минимума. Учтем, что функции  $f(x)$  и  $f'(x)$  периодические с периодом  $2\pi$ . Из рисунка видно, что промежутки возрастания  $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi l; \frac{\pi}{6} + 2\pi l\right]$  и  $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi l; \frac{5\pi}{6} + 2\pi l\right]$ , промежутки убывания  $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi l; \frac{\pi}{2} + 2\pi l\right]$  и  $\left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi l; \frac{3\pi}{2} + 2\pi l\right]$ ,  $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi l$  и  $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi l$  — точки максимума,  $x = \frac{\pi}{2} + \pi l$  — точки минимума. Ответ: см. решение.

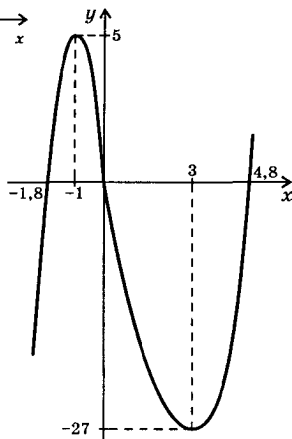
**232в)** Область определения функции  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ ,  $D(f) = R$ . Область значений этой функции  $E(f) = R$ . График функции  $f(x)$  проходит через начало координат. Найдем также точки пересечения графика функции с осью абсцисс. Положим  $f(x) = 0$  и получим кубическое уравнение:  $0 = x(x^2 - 3x - 9)$ . Случай  $x = 0$  уже был рассмотрен. Решим квадратное уравнение  $0 = x^2 - 3x - 9$ , его корни  $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 36}}{2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \approx \frac{3 \pm 6,6}{2}$ , т.е.  $x_1 \approx 4,8$  и  $x_2 \approx -1,8$ .

Найдем производную  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$ . Приравняем производную нулю и найдем критические точки функции  $f(x)$ :  $x_1 = -1$  и  $x_2 = 3$ . Отложим эти точки на координатной оси и построим диаграмму знаков производной  $f'(x)$ . Видно, что



функция возрастает на промежутках  $(-\infty; -1]$  и  $[3; \infty)$ , убывает на промежутке  $[-1; 3]$ . В точке  $x = -1$  данная функция достигает максимума и его значение  $f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) = 5$ . В точке  $x = 3$  функция имеет минимум и его значение  $f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 = -27$ . Отметив характерные точки, построим график данной функции.

Ответ: см. решение.



**232г)** Область определения функции  $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$   $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$ , область значений функции  $E(f) = (-\infty; +\infty)$ . График функции проходит через начало координат. Функция имеет вертикальные асимптоты  $x = -2$  и  $x = 2$  и горизонтальную асимптоту  $y = 0$ .

Найдем производную функции  $f'(x) = \frac{(x)(4-x^2) - x(4-x^2)'}{(4-x^2)^2} = \frac{1 \cdot (4-x^2) + x \cdot 2x}{(4-x^2)^2} = \frac{4+x^2}{(4-x^2)^2}$ . Видно, что в области определения

$f'(x) > 0$ . Поэтому функция возрастает в области  $D(f)$ . Функция не имеет критических точек (поэтому не имеет максимума и минимума). Учтем, что функция  $f(x)$  — не-

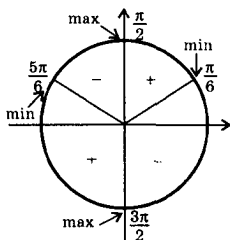
четная, т.к.  $f(-x) = \frac{-x}{4-(-x)^2} = -\frac{x}{4-x^2} = -f(x)$ . Учитывая особенности функции, построим ее график.

Ответ: см. решение.

**233г)** Область определения функции  $f(x) = \sin^2 x - \sin x$   $D(f) = \mathbb{R}$ . График функции проходит через начало координат. Найдем точки пересечения графика с осью абсцисс. Получаем уравнение:  $0 = \sin^2 x - \sin x$  или  $0 = \sin x (\sin x - 1)$ . Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Имеем уравнения:  $\sin x = 0$  (решения  $x = \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ) и  $\sin x - 1 = 0$  (решения  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ). Учтем, что функция  $f(x)$  периодическая с периодом  $2\pi$ .

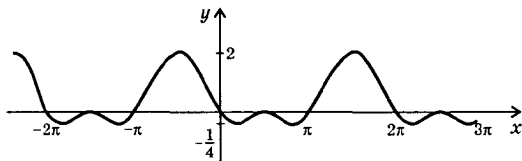
Найдем производную  $f'(x) = 2\sin x \cos x - \cos x = \cos x (2\sin x - 1)$ .

Приравняем производную нулю и найдем критические точки функции. Имеем уравнения.  $\cos x = 0$  (его решения  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ) и  $2\sin x - 1 = 0$  (решения  $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$ ). Отметим эти точки на тригонометрическом круге для промежутка  $[0; 2\pi]$ . Определим знак производной, например, для



$x = 0$ . Имеем:  $f'(0) = \cos 0 \cdot (2 \sin 0 - 1) = 1 \cdot (-1) = -1 < 0$ . Тогда легко определить промежутки возрастания и убывания функции, а также точки максимума и минимума.

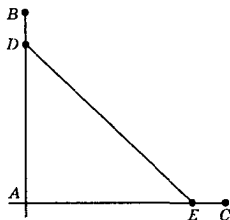
Найдем  $f_{\min} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$  и  $f_{\max} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} = 1^2 - 1 = 0$  и  $f_{\max} = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^2 - (-1) = 2$ . Отметим характерные точки и построим график данной функции.



**Ответ:** см. решение.

**236)** Пусть первое неотрицательное слагаемое  $x$  (где  $0 \leq x \leq 10$ ), тогда второе —  $(10 - x)$ . Найдем сумму кубов этих слагаемых:  $f(x) = x^3 + (10 - x)^3 = x^3 + 10^3 - 3 \cdot 10^2 \cdot x + 3 \cdot 10 \cdot x^2 - x^3 = 30x^2 - 300x + 1000$ . Найдем наибольшее и наименьшее значения этой функции на промежутке  $[0; 10]$ . Вычислим  $f'(x) = 60x - 300$ . Критическая точка  $x = 5$  — точка минимума. Так как график функции  $f(x)$  парабола симметричен относительно прямой  $x = 5$ , то наибольшее значение функция принимает на концах промежутка, т.е. при  $x = 0$  и при  $x = 10$ . **Ответ:** а)  $0 + 10$  или  $10 + 0$ , б)  $5 + 5$ .

**239)** Пусть дороги пересекаются в точке  $A$  под прямым углом. Первоначально машины находятся в точках  $B$  и  $C$ , так что  $AB = 2$  км и  $AC = 3$  км. Через время  $t$  (часов) машины находятся в точках  $D$  и  $E$ , так что  $AD = 2 - 40 \cdot t$  (км) и  $AE = 3 - 50 \cdot t$  (км). Из  $\triangle ADE$  по теореме Пифагора найдем расстояние  $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} =$

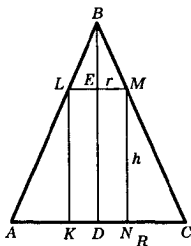


$$= \sqrt{(2 - 40 \cdot t)^2 + (3 - 50 \cdot t)^2} = \sqrt{4 - 160t + 1600t^2 + 9 - 300t + 2500t^2} = \sqrt{4100t^2 - 460t + 13}.$$

Подкоренное выражение является квадратичной функцией и имеет минимум в точке  $t = -\frac{b}{2a} = -\frac{-460}{2 \cdot 4100} = \frac{23}{410}$  (ч). Ответ:  $\frac{23}{410}$  ч.

**242)** Объем цилиндра  $V = \pi R^2 h$ , где  $R$  — радиус основания,  $h$  — высота цилиндра. По условию  $V = 16\pi$  м<sup>3</sup>, поэтому:  $16\pi = \pi R^2 h$  или  $16 = R^2 h$ . Выразим из этого соотношения  $h = \frac{16}{R^2}$ . Площадь полной поверхности цилиндра  $S = 2\pi R^2 + 2\pi R h = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{16}{R^2} = 2\pi R^2 + 32\pi R^{-1}$ . Найдем наименьшее значение функции  $S(R)$ . Вычислим производную  $S'(R) = 4\pi R - 32\pi R^{-2} = 4\pi R - \frac{32\pi}{R^2} = \frac{4\pi R^3 - 32\pi}{R^2} = \frac{4\pi(R^3 - 8)}{R^2}$ . Критическая точка функции  $S(R)$   $R = 2$ . Легко проверить, что эта точка минимума. Теперь найдем  $h = \frac{16}{R^2} = \frac{16}{2^2} = 4$ . Видно, что  $h = 2R$ , т.е. высота цилиндра должна равняться диаметру основания.

Ответ:  $h = 2R$ .



**244)** Рассмотрим осевое сечение конуса  $ABC$  и вписанного в него цилиндра  $KLMN$ . Высота конуса  $BD = H$  и радиус основания  $AD = DC = R$ . Пусть высота цилиндра  $LK = h$  и радиус основания  $KD = DN = r$ . Найдем связь между переменными  $h$  и  $r$ .

Рассмотрим подобные треугольники  $BEM$  и  $BDC$ :  $\frac{BE}{BD} = \frac{EM}{DC}$  или  $\frac{H-h}{H} = \frac{r}{R}$ . Используя свойство пропорции, получим:  $HR - hR = rH$  или  $H(R - r) = hR$ , откуда  $h = \frac{H(R-r)}{R}$ . Пло-

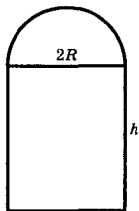
щадь полной поверхности цилиндра  $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{H(R-r)}{R}$ . Найдем производную  $S'(r) = 4\pi r + \frac{2\pi H}{R} (R - 2r) = \frac{2\pi(2rR + HR - 2rH)}{R}$ . Критическая точка определяется условием:

$2rR + HR - 2rH = 0$  или  $HR = 2r(H - R)$ , откуда  $r = \frac{HR}{2(H - R)}$  (оче-

видно, при  $H > R$ ). Ответ:  $r = \frac{HR}{2(H - R)}$  при  $H > R$ .

**249)** Пусть окно имеет изображенную на рисунке форму, состоящую из прямоугольника (с размерами  $2R$  и  $h$ ) и полукруга (радиуса  $R$ ). Периметр окна  $p = 2h + 2R + \pi R$ , откуда  $h = \frac{p - (2 + \pi)R}{2}$ . Пло-

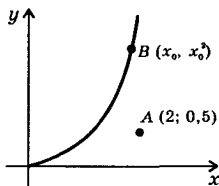
щадь окна  $S = 2Rh + \frac{\pi R^2}{2} = 2R \frac{p - (2 + \pi)R}{2} + \frac{\pi R^2}{2} = Rp - (2 + \pi)R^2 + \frac{\pi R^2}{2} = Rp - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)R^2$ . Найдем производную функции  $S'(R) = p - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2R = p - (4 + \pi) \cdot R$ . Функция  $S(R)$  имеет критическую точку  $R = \frac{p}{4 + \pi}$ . Найдем  $h = \frac{p - (2 + \pi)R}{2} = \frac{p - \frac{(2 + \pi)p}{4 + \pi}}{2} = p \frac{4 + \pi - (2 + \pi)}{2(4 + \pi)} = \frac{p}{4 + \pi}$ .



**Ответ:**  $R = h = \frac{p}{4 + \pi}$ .

252) Пусть искомая точка параболы  $y = x^2$  имеет координаты  $B(x_0, x_0^2)$ . Запишем расстояние  $AB = \sqrt{(x_0 - 2)^2 + \left(x_0^2 - \frac{1}{2}\right)^2}$ . Найдем производную функции  $AB'(x_0) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{2(x_0 - 2) + 2\left(x_0^2 - \frac{1}{2}\right) \cdot 2x_0}{2\sqrt{(x_0 - 2)^2 + \left(x_0^2 - \frac{1}{2}\right)^2}} = \\ &= \frac{x_0 - 2 + 2x_0^3 - x_0}{2\sqrt{(x_0 - 2)^2 + \left(x_0^2 - \frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2(x_0^3 - 1)}{2\sqrt{(x_0 - 2)^2 + \left(x_0^2 - \frac{1}{2}\right)^2}}. \end{aligned}$$



Видно, что  $x_0 = 1$  — точка минимума. Тогда координаты точки  $B(1; 1)$ . **Ответ:**  $(1; 1)$ .

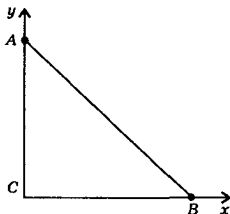
254б) Учтем, что скорость тела — производная перемещения  $x(t)$  от времени. Для перемещений тел  $x_1(t) = 9t^2 + 1$  и  $x_2(t) = t^3$  найдем скорости  $v_1 = 18t$  и  $v_2 = 3t^2$ . Известно, что скорости первой точки меньше скорости второй. Поэтому имеем неравенство:  $18t < 3t^2$  или  $0 < 3t(t - 6)$ . Решение этого неравенства  $t > 6$ .

**Ответ:**  $(6; \infty)$ .

259) Рассмотрим положение лестницы  $AB$  в момент времени  $t$ . Расстояние  $BC = 2t$ , тогда по теореме Пифагора из  $\triangle ABC$ :

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - (2t)^2} = \\ &= \sqrt{25 - 4t^2}. \end{aligned}$$

Координата  $y(t) = \sqrt{25 - 4t^2}$ . Учтем, что скорость точки  $A$  — производная координаты  $y(t)$ . Получаем:  $v = y'(t) =$



$= \frac{-8t}{2\sqrt{25-4t^2}} = \frac{-4t}{\sqrt{25-4t^2}}$  (знак минус показывает, что направление скорости противоположно направлению оси ординат).

Известно, что ускорение — производная от скорости  $v(t)$ . Найдем

ускорение:  $a = v'(t) = -4 \left( \frac{t}{\sqrt{25-4t^2}} \right)' = -4 \frac{1 \cdot \sqrt{25-4t^2} - t \cdot \frac{-8t}{2\sqrt{25-4t^2}}}{25-4t^2} =$   
 $= -4 \frac{25-4t^2+4t^2}{\sqrt{25-4t^2}} = -\frac{100}{\sqrt{(25-4t^2)^3}}$  (знак минус также показывает, что направление ускорения противоположно направлению оси ординат).

Ответ:  $v = \frac{4t}{\sqrt{25-4t^2}}$  (м/с),  $a = \frac{100}{\sqrt{(25-4t^2)^3}}$  (м/с<sup>2</sup>).

**263)** Известно, что угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной к графику функции  $y(x)$  равен производной  $y'(x)$  в точке касания. Найдем производную функции  $y(x) = -\frac{x^2}{2} - 1$ . Получаем:  $y'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 2x = -x$ .

а) Если угол наклона касательной  $45^\circ$ , то  $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$  и получаем уравнение:  $-x = 1$ , откуда  $x = -1$  и  $y(-1) = -\frac{(-1)^2}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$ . Тогда координаты точки касания  $A(-1; -1,5)$ .

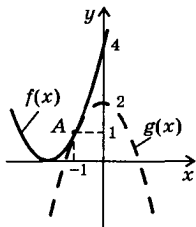
б) Если угол наклона касательной  $135^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$  и получаем уравнение:  $-x = -1$ , откуда  $x = 1$  и  $y(1) = -\frac{1^2}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$ . Координаты точки касания  $B(1; -1,5)$ .

Ответ: а)  $A(-1; -1,5)$ , б)  $B(1; -1,5)$ .

**266)** Учтем, что угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной к графику функции  $f(x)$  равен производной  $f'(x)$  в точке касания. Найдем производную функции  $f(x) = x^5 + 2x - 7$ . Получаем:  $f'(x) = 5x^4 + 2$ . Видно, что при всех  $x$  производная положительна, т.е.  $\operatorname{tg} \alpha > 0$  и  $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , где  $\alpha$  — угол наклона касательной к оси абсцисс. Ответ: доказано.

**267)** На рисунке изображены графики функций  $f(x) = (x+2)^2$  и  $g(x) = 2 - x^2$ . Найдем общую точку графиков этих функций:  $(x+2)^2 = 2 - x^2$  или  $x^2 + 4x + 4 = 2 - x^2$  или  $x^2 + 2x + 1 = 0$  или  $(x+1)^2 = 0$ , откуда  $x = -1$ . Найдем угловые коэффициенты каса-

тельных  $k_1$  и  $k_2$ , проведенных в этой точке к графикам функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , соответственно. Получаем:  $k_1 = f'(x) = 2(x+2)$  и  $k_2 = g'(x) = -2x$ , в точке  $x = -1$  имеем:  $k_1 = 2(-1+2) = 2$  и  $k_2 = -2 \cdot (-1) = 2$ . Видно, что  $k_1 = k_2$ . Так как касательные имеют одинаковые угловые коэффициенты и проходят через точку  $A$ , то эти касательные совпадают. Следовательно, графики функций  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют общую точку  $A$  и общую касательную, проходящую через эту точку. Ответ: доказано.



**268а)** Используя правила нахождения и таблицу первообразных, для функции  $f(x) = 4\sin x + \cos 3x$  найдем первообразную  $F(x) = -4\cos x + \frac{\sin 3x}{3} + c = -4\cos x + \frac{1}{3}\sin 3x + c$ .

Ответ:  $-4\cos x + \frac{1}{3}\sin 3x + c$ .

**269б)** Используя правила нахождения и таблицу первообразных, для функции  $f(x) = x^{-2} + \cos x$  найдем первообразную  $F(x) = -\frac{x^{-1}}{-1} + \sin x + c = -\frac{1}{x} + \sin x + c$ . Так как график первообразной проходит через точку  $M\left(\frac{\pi}{2}; -\frac{2}{\pi}\right)$ , то для определения  $c$  получаем уравнение:  $-\frac{2}{\pi} = -\frac{1}{\pi/2} + \sin \frac{\pi}{2} + c$  или  $-\frac{2}{\pi} = -\frac{2}{\pi} + 1 + c$ , откуда  $c = -1$ . Тогда искомая первообразная  $F(x) = -\frac{1}{x} + \sin x + c$ .

Ответ:  $-\frac{1}{x} + \sin x + c$ .

**271)** Так как угловой коэффициент касательной равен  $3x^2$  (т.е.  $F'(x) = 3x^2$ ), то найдем функцию  $F(x) = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + c = x^3 + c$ . Известно, что эта кривая проходит через точку  $A(2; 3)$ . Получаем уравнение:  $3 = 2^3 + c$ , откуда  $c = -5$ . Тогда функция имеет вид  $F(x) = x^3 - 5$ .

Ответ:  $F(x) = x^3 - 5$ .

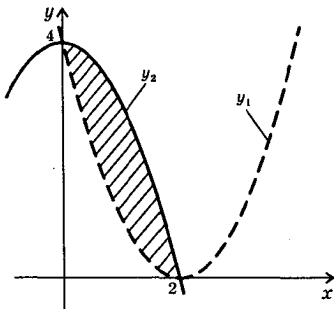
**273б)** При вычислении данного интеграла используем правила нахождения и таблицу первообразных. Получаем:

$$\int_1^2 (x^{-2} + x^2) dx = \left( \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \left( -\frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \left( -\frac{1}{2} + \frac{2^3}{3} \right) - \left( -\frac{1}{1} + \frac{1^3}{3} \right) = \left( -\frac{1}{2} + \frac{8}{3} \right) + \frac{2}{3} = \frac{10}{3} - \frac{1}{2} = \frac{20-3}{6} = \frac{17}{6}. \quad \text{Ответ: } \frac{17}{6}.$$

**2746)** Сначала вычислим данный интеграл:  $\int_0^{a+\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx =$

$= \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{a+\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} (\sin(2a + \pi) - \sin 0) = -\frac{1}{2} \sin 2a$ . Учтем ограниченность функции синус. Тогда наибольшее значение интеграла  $\frac{1}{2}$ , наименьшее значение  $-\left(-\frac{1}{2}\right)$ . Ответ:  $\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$ .

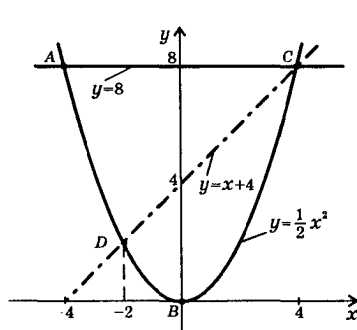
**2756)** Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями  $y_1 = (x-2)^2$  и  $y_2 = 4 - x^2$ . Точки пересечения графиков функций  $y_1$  и  $y_2$ :  $x=0$  и  $x=2$ . Тогда площадь фигуры



$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 (y_2 - y_1) \, dx = \int_0^2 (4 - x^2 - (x-2)^2) \, dx = \int_0^2 (4x - 2x^2) \, dx = \\ &= \left( 2x^2 - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \left( 2 \cdot 2^2 - \frac{2 \cdot 2^3}{3} \right) - 0 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{8}{3}$ .

**276)** Прежде всего построим фигуру ABC, ограниченную линиями



ми  $y = \frac{1}{2} x^2$  и  $y = 8$ . Также проведем прямую  $y = x + 4$ , разбивающую фигуру на две части ADC и DCB. Сначала найдем координаты точек A и C. Получаем уравнение:

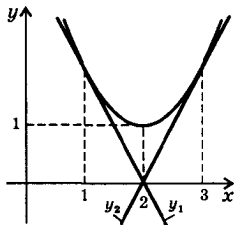
$\frac{1}{2} x^2 = 8$  или  $x^2 = 16$ , откуда  $x = \pm 4$ . Также найдем координаты точки D. Имеем

уравнение:  $\frac{1}{2} x^2 = x + 4$  или  $x^2 - 2x - 8 = 0$ , корни которого

$x_1 = -2$  и  $x_2 = 4$  (точка C). Тогда  $y = x + 4 = -2 + 4 = 2$ .

Запишем площади искомых фигур  $S_{ADC} = \int_{-4}^{-2} \left( 8 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx +$   
 $+ \int_{-2}^4 (8 - x - 4) dx = \left( 8x - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{-4}^{-2} + \left( 4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^4 = \left( -16 + \frac{8}{6} \right) - \left( -32 + \frac{64}{6} \right) +$   
 $+ \left( 16 - \frac{16}{2} \right) - \left( -8 - \frac{4}{2} \right) = \frac{74}{3}$  и  $S_{DCB} = \int_{-2}^4 \left( x + 4 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx =$   
 $= \left( \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{-2}^4 = \left( \frac{16}{2} + 16 - \frac{64}{6} \right) - \left( \frac{4}{2} - 8 + \frac{8}{6} \right) = 18.$   
Ответ:  $\frac{74}{3}$  и 18.

**278)** Построим параболу  $y = x^2 - 4x + 5$  и касательные к ней, проведенными через точки с абсциссами  $x = 1$  и  $x = 3$ . Найдем уравнения этих касательных. Производная данной функции  $y' = 2x - 4$ . Пусть  $x_0$  — точка касания. Тогда уравнение касательной:  $y = (2x_0 - 4)(x - x_0) + x_0^2 - 4x_0 + 5 = (2x_0 - 4)x - 2x_0^2 + 4x_0 + x_0^2 - 4x_0 + 5 = (2x_0 - 4)x - x_0^2 + 5$ , т.е.  $y = (2x_0 - 4)x - x_0^2 + 5$ . Подставляя значение  $x_0 = 1$ , получим уравнение первой касательной  $y_1 = -2x + 4$ . Подставляя значение  $x_0 = 3$ , найдем уравнение второй касательной  $y_2 = 2x - 4$ . Легко проверить, что касательные  $y_1$  и  $y_2$  пересекаются в точке с координатами  $(2; 0)$ .



Запишем площадь искомой фигуры

$$S = \int_1^2 (y - y_1) dx + \int_2^3 (y - y_2) dx = \int_1^2 (x^2 - 4x + 5 + 2x - 4) dx + \int_2^3 (x^2 - 4x + 5 - 2x + 4) dx =$$

$$+ \int_1^2 (x^2 - 2x + 1) dx + \int_2^3 (x^2 - 6x + 9) dx = \int_1^2 (x - 1)^2 dx +$$

$$+ \int_2^3 (x - 3)^2 dx = \frac{(x - 1)^3}{3} \Big|_1^2 + \frac{(x - 3)^3}{3} \Big|_2^3 = \frac{(2 - 1)^3}{3} - \frac{(1 - 1)^3}{3} + \frac{(3 - 3)^3}{3} -$$

$$- \frac{(2 - 3)^3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \quad \text{Ответ: } \frac{2}{3}.$$

**281)** Для функции  $f(x) = a \sin \pi x + b$  запишем условия задачи. Найдем производную  $f'(x) = a \cos \pi x \cdot \pi = a\pi \cos \pi x$ . Так как  $f'(2) = 2$ , то имеем уравнение:  $a\pi \cos 2\pi = 2$  или  $a\pi = 2$ , откуда  $a = \frac{2}{\pi}$ .

Теперь вычислим  $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (a \sin \pi x + b) dx =$   
 $= \left( -\frac{a \cos \pi x}{\pi} + bx \right) \Big|_0^2 = \left( -\frac{a \cos 2\pi}{\pi} + 2b \right) - \left( -\frac{a \cos 0}{\pi} + b \cdot 0 \right) = 2b$ . По условию этот интеграл равен 4. Имеем уравнение:  $2b = 4$ , откуда  $b = 2$ .

Ответ:  $a = \frac{2}{\pi}$ ,  $b = 2$ .

## Глава VI. ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

### § 1. Числа и преобразования выражений

**1а)** Если число  $p$  простое и  $p > 3$ , то число  $p$  можно представить в виде  $p = 3n + 1$  или в виде  $p = 3n + 2$  (где  $n \in \mathbb{N}$ ). Рассмотрим эти случаи.

а) Пусть  $p = 3n + 1$ . Чтобы число  $p$  было простым, надо чтобы число  $n$  было четным, т.е.  $n = 2m$ . Тогда число  $p$  имеет вид  $p = 6m + 1$ . Запишем число  $a = p^2 - 1 = (6m + 1)^2 - 1^2 = 6m(6m + 2) = 12m(3m + 1)$ . Очевидно, что это число без остатка делится на 24. Разумеется, число  $a$  без остатка делится на 12. Если число  $m$  четное, то число  $a$  делится еще и на 2. Если число  $m$  нечетное, то на 2 делится число  $3m + 1$ .

б) Пусть  $p = 3n + 2$ . Чтобы число  $p$  было простым, надо чтобы число  $n$  было нечетным, т.е.  $n = 2m + 1$ . Тогда число  $p$  имеет вид  $p = 3(2m + 1) + 2 = 6m + 5$ . Запишем число  $a = p^2 - 1 = (6m + 5)^2 - 1^2 = (6m + 5 + 1)(6m + 5 - 1) = (6m + 6)(6m + 4) = 6(m + 1) \cdot 2(3m + 2) = 12(m + 1)(3m + 2)$ . Число  $a$  без остатка делится на 12. Если число  $m$  четное, то число  $(3m + 2)$  делится еще и на 2. Если число  $m$  нечетное, то число  $m + 1$  четное и делится на 2. Следовательно, число  $a$  без остатка делится на 24.

Итак, если  $p$  — простое число и  $p > 3$ , то  $p^2 - 1$  без остатка делится на 24. Ответ: доказано.

**2)** Квадратное уравнение  $x^2 + ax + 6 = 0$  имеет корни, если его дискриминант  $D = a^2 - 24 \geq 0$ . Пусть уравнение имеет целые корни  $x_1$  и  $x_2$ . Запишем формулы Виета для корней уравнения:  $x_1 + x_2 = -a$  и  $x_1 x_2 = 6$ . Так как  $x_1$  и  $x_2$  целые числа, то они являются делителями свободного члена (числа 6):  $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$ . Поэтому возможны варианты.

а)  $x_1 = \pm 1$  и  $x_2 = \pm 6$  (или наоборот), тогда  $a = -(x_1 + x_2) = \mp 7$ .

б)  $x_1 = \pm 2$  и  $x_2 = \pm 3$  (или наоборот), тогда  $a = \mp 5$ .

При всех найденных значениях  $a$  дискриминант уравнения  $D > 0$ . Ответ:  $\pm 5; \pm 7$ .

**5а)** Сначала найдем остатки от деления квадратов натуральных чисел на 3. Числа  $n$  можно записать в виде:  $n = 3t$  или  $n = 3t + 1$  или  $n = 3t + 2$  (где  $t \in \mathbb{N}$ ). Рассмотрим эти случаи.

а) Если  $n = 3t$ , то  $n^2 = (3t)^2 = 9t^2 = 3 \cdot (3t^2)$  — это число без остатка делится на 3.

б) Если  $n = 3t + 1$ , то  $n^2 = (3t + 1)^2 = 9t^2 + 6t + 1 = 3 \cdot (3t^2 + 2t) + 1$  — это число при делении на 3 дает остаток 1.

в) Если  $n = 3t + 2$ , то  $n^2 = (3t + 2)^2 = 9t^2 + 12t + 4 = (9t^2 + 12t + 3) + 1 = 3 \cdot (3t^2 + 4t + 1) + 1$  — это число при делении на 3 также дает остаток 1.

Таким образом, при делении на 3 возможны остатки 0 и 1.

Теперь найдем остатки от деления квадратов натуральных чисел на 4. Числа  $n$  можно в этом случае записать в виде:  $n = 4t$  или  $n = 4t + 1$  или  $n = 4t + 2$  или  $n = 4t + 3$ . Рассмотрим эти случаи.

а) Если  $n = 4t$ , то  $n^2 = (4t)^2 = 16t^2 = 4 \cdot (4t^2)$  — это число без остатка делится на 4.

б) Если  $n = 4t + 1$ , то  $n^2 = (4t + 1)^2 = 16t^2 + 8t + 1 = 4 \cdot (4t^2 + 2t) + 1$  — это число при делении на 4 дает остаток 1.

в) Если  $n = 4t + 2$ , то  $n^2 = (4t + 2)^2 = 16t^2 + 16t + 4 = 4 \cdot (4t^2 + 4t + 1)$  — это число без остатка делится на 4.

г) Если  $n = 4t + 3$ , то  $n^2 = (4t + 3)^2 = 16t^2 + 24t + 9 = (16t^2 + 24t + 8) + 1 = 4 \cdot (4t^2 + 6t + 2) + 1$  — это число при делении на 4 дает остаток 1.

Таким образом, и при делении на 4 возможны остатки 0 и 1.

Ответ: 0 и 1.

**7б,в)** Докажем признаки делимости на 3 и 9: если сумма цифр числа делится на 3 и 9, то и само число делится на 3 и 9. Для определенности рассмотрим трехзначное число  $\overline{abc} = 100a + 10b + c$  (где  $a$  — число сотен,  $b$  — число десятков и  $c$  — число единиц). Выделим в этом числе число, которое без остатка делится на 3 и 9:  $100a + 10b + c = (99a + 9b) + (a + b + c) = 9(11a + b) + (a + b + c)$ . В этой сумме первое слагаемое делится на 3 и 9. Поэтому, чтобы на 3 и 9 делилось данное число  $\overline{abc}$ , надо, чтобы на 3 и 9 делилась сумма его цифр  $a + b + c$ . Ответ: доказано.

**8б)** Уравнение  $2^x - 1 = y^2$  запишем в виде  $2^x = y^2 + 1$ . При всех значениях  $y$  правая часть уравнения  $y^2 + 1 \geq 1$ . Поэтому и левая часть  $2^x \geq 1$ , откуда  $x \geq 0$ . Отдельно рассмотрим случай  $x = 0$ . Тогда уравнение имеет вид:  $1 = y^2 + 1$ , откуда  $y = 0$ . Получили целое решение  $x_1 = 0$  и  $y_1 = 0$ .

Пусть теперь  $x > 0$ . Тогда левая часть уравнения  $2^x$  четная. Поэтому  $y$  может быть только нечетным числом, т.е.  $y = 2m + 1$  (где  $m \in \mathbb{Z}$ ). Данное уравнение имеет вид:  $2^x = (2m + 1)^2 + 1$  или

$2^x = 4m^2 + 4m + 2$  или  $2^{x-1} = 2m(m+1) + 1$ . Видно, что при  $x > 1$  левая часть уравнения четное число, а при  $m \neq 0, m \neq -1$  правая часть уравнения — нечетное число. Поэтому возможны только варианты  $x = 1$  и  $m = 0$  (тогда  $y = 2m + 1 = 1$ ) или  $m = -1$  (тогда  $y = 2m + 1 = -1$ ). Следовательно, существуют еще два целых решения:  $x_2 = 1, y_2 = 1$  и  $x_3 = 1, y_3 = -1$ . Таким образом, данное уравнение имеет три целых решения. Ответ: (0; 0), (1; 1), (1; -1).

9а) Уравнение  $13x - 7y = 6$  запишем в виде  $13x = 7y + 6$ , откуда  $x = \frac{7y+6}{13}$ . Легко угадать одно целое число  $y = 1$ , для которого число  $x$  также целое. Так как числа 7, 6 и 13 взаимно простые, то все остальные целые числа  $y$  можно записать в виде  $y = 13k + 1$  (где  $k \in \mathbb{Z}$ ). Теперь найдем  $x = \frac{7y+6}{13} = \frac{7(13k+1)+6}{13} = \frac{91k+13}{13} = 7k+1$  — целое число. Таким образом, целые решения данного уравнения  $x = 7k+1, y = 13k+1$  (где  $k \in \mathbb{Z}$ ). Ответ:  $(7k+1; 13k+1), k \in \mathbb{Z}$ .

10) Пусть числитель и знаменатель дроби  $\frac{5l+6}{5l-1}$  (где  $l$  — целое число) имеют общий целый делитель  $k$ , т.е. выполняются равенства  $\begin{cases} 5l+6 = kn \\ 5l-1 = km \end{cases}$  (где целые числа  $n$  и  $m$  не имеют общих делителей). Исключим из этой системы переменную  $l$ . Для этого умножим первое уравнение на 3, второе — на 5 и вычтем из первого уравнения второе. Имеем:  $\begin{cases} 15l+18 = 3kn \\ 15l+5 = 5km \end{cases}$ , откуда  $13 = k(3n-5m)$ . Видно, что число  $k$  должно быть делителем числа 13. Но число 13 простое, поэтому  $k = 13$ . Таким образом, дробь можно сократить на число 13. Ответ: 13.

12а) Докажем равенство  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  методом математической индукции.

а) При  $n = 1$  левая часть равенства состоит из одного слагаемого  $1^2$ . Проверим равенство:  $1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$  — верно.

б) Пусть при  $n = k$  данное равенство выполняется, т.е.  $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ .

в) При  $n = k+1$  в левой части равенства добавляется еще одно слагаемое  $(k+1)^2$ . Учтем результат предыдущего пункта и преобразуем левую часть:  $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2) + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} +$

$$\begin{aligned}
 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \\
 &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \text{ Видно, что это выражение} \\
 &\text{совпадает с выражением } \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ при } n = k+1.
 \end{aligned}$$

Ответ: доказано.

**13а)** Докажем методом математической индукции равенство

$$\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{n}{4(n+4)}.$$

а) При  $n = 1$  левая часть равенства содержит один член  $\frac{1}{4 \cdot 5}$ .

Проверим равенство:  $\frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{4 \cdot (1+4)}$  — верно.

б) Пусть при  $n = k$  данное равенство выполняется, т.е.

$$\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(k+3)(k+4)} = \frac{k}{4(k+4)}.$$

в) При  $n = k+1$  в левой части равенства добавляется еще одно

слагаемое  $\frac{1}{(k+1+3)(k+1+4)} = \frac{1}{(k+4)(k+5)}$ . Учтем результат пре-

$$\begin{aligned}
 &\text{дыдущего пункта и преобразуем левую часть: } \left( \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \right. \\
 &\left. + \dots + \frac{1}{(k+3)(k+4)} \right) + \frac{1}{(k+4)(k+5)} = \frac{k}{4(k+4)} + \frac{1}{(k+4)(k+5)} = \\
 &= \frac{k(k+5) + 4}{4(k+4)(k+5)} = \frac{k^2 + 5k + 4}{4(k+4)(k+5)} = \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+4)(k+5)} = \frac{k+1}{4(k+5)}.
 \end{aligned}$$

Видно, что это выражение совпадает с выражением  $\frac{n}{4(n+4)}$  при  $n = k+1$ . Ответ: доказано.

**15а)** Докажем методом математической индукции, что для любого натурального  $n$  выражение  $6^{2n-1} + 1$  кратно 7.

а) При  $n = 1$  величина  $6^{2 \cdot 1 - 1} + 1 = 6^1 + 1 = 7$  и кратна 7.

б) Пусть при  $n = k$  выражение  $6^{2k-1} + 1$  кратно 7.

в) Рассмотрим данное выражение при  $n = k+1$ . Имеем:  $6^{2(k+1)-1} + 1 = 6^{2k+1} + 1$ . Запишем это выражение таким образом, чтобы вы- делить выражение предыдущего пункта (кратное 7). Получаем:  $6^{2k+1} + 1 = 6^2 \cdot 6^{2k-1} + 1 = (36 \cdot 6^{2k-1} + 36) + (1 - 36) = 36(6^{2k-1} + 1) - 35$ . В этой сумме первое слагаемое кратно 7, т.к. выражение  $6^{2k-1} + 1$  кратно 7 (по предыдущему пункту), число 35 также кратно 7. Поэтому и вся сумма кратна 7. Ответ: доказано.

**20а)** Предположим, что число  $\sqrt{3}$  рациональное, т.е. его можно записать в виде  $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$  (где  $m$  и  $n$  взаимно простые натуральные числа, т.е. числа, не имеющие общих делителей). Возведем это равенство в квадрат  $3 = \frac{m^2}{n^2}$ , откуда  $m^2 = 3n^2$ . Так как числа  $m$  и  $n$  взаимно простые, то число  $m$  кратно 3, т.е.  $m = 3k$  (где  $k \in \mathbb{N}$ ). Подставим это выражение в соотношение  $m^2 = 3n^2$  и получим:  $(3k)^2 = 3n^2$  или  $9k^2 = 3n^2$  или  $3k^2 = n^2$ . Из такого выражения делаем вывод, что  $n$  кратно 3. Таким образом, получили противоречие: числа  $m$  и  $n$  кратны 3, т.е. имеют общий множитель, что противоречит исходной предпосылке. Ответ: доказано.

**20г)** Очевидно, что число  $\log_2 9 > 1$ . Предположим, что это число рациональное. Тогда его можно записать в виде  $\log_2 9 = \frac{m}{n}$  (где  $m$  и  $n$  взаимно простые натуральные числа). По определению логарифма получаем:  $2^{\frac{m}{n}} = 9$  или  $2^m = 9^n$ . Но число 2 в любой натуральной степени  $m$  четное, а число 9 в любой натуральной степени  $n$  нечетное. Получаем противоречие. Ответ: доказано.

**21б)** Предположим, что число  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  рациональное, т.е.  $\sqrt{2} + \sqrt{3} = a$ . Возведем это равенство в квадрат:  $2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 3 = a^2$ , откуда  $\sqrt{6} = \frac{a^2 - 5}{2}$ . Если  $a$  рациональное число, то и величина  $\frac{a^2 - 5}{2}$  также является рациональным числом. Но число  $\sqrt{6}$  — иррациональное. Получаем противоречие. Ответ: доказано.

**23б)** В подкоренном выражении радикала  $\sqrt{129 - 56\sqrt{5}}$  выделим полный квадрат разности двух чисел. Предположим, что  $129 - 56\sqrt{5} = (a\sqrt{5} - b)^2$ , где  $a$  и  $b$  — натуральные числа. В этом равенстве возведем правую часть в квадрат:  $129 - 56\sqrt{5} = 5a^2 - 2ab\sqrt{5} + b^2$ . Сравнивая левые и правые части равенства, получаем систему уравнений  $\begin{cases} 5a^2 + b^2 = 129 \\ 2ab = 56 \end{cases}$  или  $\begin{cases} 5a^2 + b^2 = 129 \\ ab = 28 \end{cases}$ . Из второго уравнения следует, что числа  $a$  и  $b$  делители числа 28. Подберем такие делители  $a = 4$  и  $b = 7$ , которые удовлетворяют и первому уравнению.

Итак, получили  $129 - 56\sqrt{5} = (4\sqrt{5} - 7)^2$ . Тогда данное выражение  $\sqrt{129 - 56\sqrt{5}} = \sqrt{(4\sqrt{5} - 7)^2} = 4\sqrt{5} - 7$ . Ответ:  $4\sqrt{5} - 7$ .

27) Напомним еще одну формулу для возведения суммы чисел в куб:  $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ . Обозначим данное число

$$x = \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}} \quad \text{и возведем его в куб:}$$

$$x^3 = \left( \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} \right)^3 + \left( \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}} \right)^3 + 3 \sqrt[3]{\left(6 + \sqrt{\frac{847}{27}}\right) \left(6 - \sqrt{\frac{847}{27}}\right)} \cdot x$$

$$\text{или } x^3 = 6 + \sqrt{\frac{847}{27}} + 6 - \sqrt{\frac{847}{27}} + 3 \sqrt[3]{6^2 - \frac{847}{27}} \quad \text{или } x^3 = 12 + 3 \sqrt[3]{\frac{125}{27}} x \quad \text{или}$$

$x^3 = 12 + 3 \cdot \frac{5}{3} x$  или  $x^3 - 5x - 12 = 0$ . Найдем корень этого кубического уравнения:  $(x^3 - 27) - (5x - 15) = 0$  или  $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) - 5(x - 3) = 0$  или  $(x - 3)(x^2 + 3x + 9 - 5) = 0$  или  $(x - 3)(x^2 + 3x + 4) = 0$ . Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнения:  $x - 3 = 0$  (откуда  $x = 3$ ) и  $x^2 + 3x + 4 = 0$  (это уравнение корней не имеет, т.к. его дискриминант отрицательный). Следовательно, данное число  $x = 3$  — число натуральное, т.е. рациональное. Ответ: доказано.

296) В многочлене  $x^4 + x^2 + 1$  выделим квадрат суммы двух чисел:  $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ . Ответ:  $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ .

30) Для доказательства тождества  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$  преобразуем его левую и правую части, раскрывая скобки. Левая часть:  $a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2$ . Правая часть:  $a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = a^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2 + b^2x^2$ . Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано. Ответ: доказано.

32а) Для доказательства тождества  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$  преобразуем его левую и правую части. По условию  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , откуда  $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ . Тогда левая часть:  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \sin \alpha + \sin \beta + \sin (\pi - (\alpha + \beta)) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left( \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \times 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left( -\frac{\beta}{2} \right) = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ . Правая часть:  $4 \cos \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ .

Видно, что левая часть равна правой. Следовательно, тождество доказано. Ответ: доказано.

**33а)** Для доказательства тождества  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$  для любого  $x \in [-1; 1]$  вспомним определение обратных тригонометрических функций. Угол  $\alpha = \arcsin x$  такой, что выполнены два условия:  $\sin \alpha = x$  и  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . Сразу найдем  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - x^2}$  (учтено, что  $\alpha$  принадлежит I или IV четвертям и  $\cos \alpha \geq 0$ ). Угол  $\beta = \arccos x$  такой, что выполнены два условия:  $\cos \beta = x$  и  $\beta \in [0; \pi]$ . Найдем  $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - x^2}$  (учтено, что  $\beta$  принадлежит I или II четвертям и  $\sin \beta \geq 0$ ). Тогда надо доказать, что  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ .

Найдем, например, синус от суммы двух углов:  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = x \cdot x + \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - x^2} = x^2 + 1 - x^2 = 1$ . Так как  $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  и  $0 \leq \beta \leq \pi$ , то сложим почленно эти неравенства:  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha + \beta \leq \frac{3\pi}{2}$ . На этом промежутке уравнение  $\sin(\alpha + \beta) = 1$  имеет только одно решение  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ , что и требовалось доказать.

Ответ: доказано.

**34а)** Преобразуем данное выражение, используя формулы приведения и метод вспомогательного угла. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin 250^\circ} &= \frac{1}{\cos(270^\circ + 20^\circ)} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin(270^\circ - 20^\circ)} = \frac{1}{\sin 20^\circ} - \\ - \frac{1}{\sqrt{3} \cos 20^\circ} &= \frac{\sqrt{3} \cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \sin 20^\circ\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \\ &= \frac{4(\sin 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \sin 20^\circ)}{\sqrt{3} \sin 40^\circ} = \frac{4 \sin(60^\circ - 20^\circ)}{\sqrt{3} \sin 40^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{4}{\sqrt{3}}$ .

**34б)** Преобразуем выражение  $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$ , разложив его как сумму кубов:  $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \times (\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) = (\sin^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$ . Таким

образом, надо найти  $\sin 2\alpha$ . Для этого возведем в квадрат равенство  $\sin \alpha + \cos \alpha = m$ . Имеем:  $\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = m^2$  или  $(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2\sin \alpha \cos \alpha = m^2$  или  $1 + \sin 2\alpha = m^2$ , откуда  $\sin 2\alpha = m^2 - 1$ . Тогда  $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{4} (m^2 - 1)^2$ .

Ответ:  $1 - \frac{3}{4} (m^2 - 1)^2$ .

**35а)** Пусть угол  $\alpha = \arcsin(\sin 10)$ . Этот угол удовлетворяет двум условиям:  $\sin \alpha = \sin 10$  и  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . Учитывая формулы приведения, подберем такой угол  $\alpha = 3\pi - 10$ . Проверим условия:  $\sin \alpha = \sin(3\pi - 10) = \sin(\pi - 10) = \sin 10$  (выполнено). Для оценок можно принять  $\pi \approx 3,14$  и  $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$ . Тогда  $\alpha = 3\pi - 10 \approx 3 \cdot 3,14 - 10 = 9,42 - 10 = -0,58$ . Следовательно,  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . Ответ:  $3\pi - 10$ .

**39а)** Во всех логарифмах перейдем к одинаковому основанию  $u$ .

Получаем:  $\log_x u = \frac{\log_u u}{\log_u x} = \frac{1}{\log_u x} = a$ , откуда  $\log_u x = \frac{1}{a}$ . Аналогично имеем:  $\log_u y = \frac{1}{b}$  и  $\log_u z = \frac{1}{c}$ . Тогда  $\log_{xyz} u = \frac{\log_u u}{\log_u (xyz)} =$   

$$= \frac{1}{\log_u x + \log_u y + \log_u z} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{abc}{bc + ac + ab}.$$

Ответ:  $\frac{abc}{bc + ac + ab}$ .

**40б)** Используем основное логарифмическое тождество и перейдем в основаниях степеней и логарифмов к числу 2. Получаем:

$$\begin{aligned} 2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}} &= 2^{\sqrt{\log_2 3}} - \left(2^{\log_2 3}\right)^{\sqrt{\log_3 2}} = 2^{\sqrt{\log_2 3}} - 2^{\log_2 3 \cdot \sqrt{\frac{\log_2 2}{\log_2 3}}} = \\ &= 2^{\sqrt{\log_2 3}} - 2^{\sqrt{\frac{\log_2^2 3}{\log_2 3}}} = 2^{\sqrt{\log_2 3}} - 2^{\sqrt{\log_2 3}} = 0 \quad (\text{было учтено, что } \log_2 3 > 0 \text{ и } \log_3 2 > 0). \end{aligned}$$

Ответ: 0.

**42)** Преобразуем левую часть равенства, т.к. она является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом  $b_1 = 1$  и знаменателем  $q = -\operatorname{tg} \varphi$  (т.к.  $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ , то  $\operatorname{tg} \varphi \in (0; 1)$  и  $|q| < 1$ ). Получаем:  $1 - \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^3 \varphi + \dots = \frac{b_1}{1 - q} =$

$$= \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \varphi} = \frac{1}{1 + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi + \cos \varphi} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \frac{\pi}{4} + \cos \varphi \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{2} \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{\sqrt{2} \cos \varphi}{2 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \varphi \right)}. \text{ Видно, что левая}$$

часть равна правой. Следовательно, тождество доказано.

Ответ: доказано.

**46)** Если числа  $x, y, z$  (в указанном порядке) образуют геометрическую прогрессию, то их можно записать в виде:  $y = xq$  и  $z = xq^2$  (где  $q$  — знаменатель прогрессии). Так как числа  $x + y, y + z, z + x$  образуют арифметическую прогрессию, то выполняется ее свойство: удвоенный средний член равен сумме соседних с ним членов, т.е.  $2(y + z) = (x + y) + (z + x)$  или  $2y + 2z = 2x + y + z$  или  $y + z = 2x$ . Подставим выражения для  $y$  и  $z$  и получим:  $xq + xq^2 = 2x$  или  $q^2 + q - 2 = 0$ . Корни этого квадратного уравнения:  $q = 1$  и  $q = -2$ .

Ответ: 1; -2.

**47)** Используем формулу для суммы  $n$  первых членов арифметической прогрессии. Из условия  $S_m = S_n$  получаем равенство:

$$\frac{2a_1 + d(m-1)}{2} \cdot m = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n \quad \text{или} \quad 2a_1 m + dm^2 - dm = 2a_1 n + dn^2 - dn. \text{ Перенесем все члены в левую часть и разложим ее на множители: } (2a_1 m - 2a_1 n) + (dm^2 - dn^2) - (dm - dn) = 0 \text{ или } 2a_1(m-n) + d(m-n) \cdot (m+n) - d(m-n) = 0 \text{ или } (m-n)(2a_1 + d(m+n)) = 0. \text{ Так как } m \neq n \text{ (т.е. } m-n \neq 0), \text{ то получаем } 2a_1 + d(m+n-1) = 0. \text{ Теперь}$$

$$\text{найдем сумму } S_{m+n} = \frac{2a_1 + d(m+n-1)}{2} \cdot (m+n) = \frac{0}{2} \cdot (m+n) = 0.$$

Ответ: 0.

**50а)** Запишем данную сумму в виде:

$$\begin{aligned} 1 + 11 + \dots + \underbrace{111\dots1}_n &= \frac{1}{9} \left( 9 + 99 + \dots + \underbrace{999\dots9}_n \right) = \frac{1}{9} \left( 10 - 1 + 10^2 - \right. \\ &\left. - 1 + \dots + 10^n - 1^n \right) = \frac{1}{9} \left( \left( 10 + 10^2 + \dots + 10^n \right) - n \right) = \frac{1}{9} \left( \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n \right) = \\ &= \frac{1}{9} \left( \frac{10^{n+1} - 10}{9} - n \right) = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}. \quad \text{Ответ: } \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}. \end{aligned}$$

**50б)** Обозначим искомую сумму  $S = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n$ . Умножим эту сумму на  $x$ :  $Sx = x^2 + 2x^3 + \dots + (n-1)x^n + nx^{n+1}$ . Вычтем из первого равенства второе:  $S - Sx = (x + x^2 + x^3 + \dots + x^n) - nx^{n+1}$  или

$$S(1-x) = \frac{x(x^n - 1)}{x-1} - nx^{n+1} = \frac{x^{n+1} - x - nx^{n+2} + nx^{n+1}}{x-1} = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{1-x}.$$

Разделив на  $(1-x)$ , найдем сумму  $S = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} =$   
 $= \frac{x(nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1)}{(x-1)^2}$ . Ответ:  $S = \frac{x(nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1)}{(x-1)^2}$ .

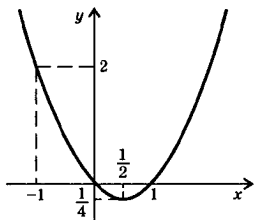
## § 2. Элементарные функции и их свойства

**51а)** Область определения функции  $y = \frac{\sqrt{|x| - x}}{\operatorname{tg} 2x}$  задается условиями:  $\begin{cases} |x| - x \geq 0 \\ \operatorname{tg} 2x \neq 0 \end{cases}$ . Решения первого неравенства — любые значения  $x$ . Из второго неравенства получаем  $2x \neq \frac{\pi}{2}n$  (где  $n \in \mathbb{Z}$ ), откуда  $x \neq \frac{\pi}{4}n$ . Ответ:  $x \neq \frac{\pi}{4}n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**51в)** Область определения функции  $y = \frac{\arcsin 0,5x}{\sqrt{x^2 - 1}}$  задается условиями  $\begin{cases} -1 \leq 0,5x \leq 1 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases}$ . Решая эти неравенства, получаем:  
 $\begin{cases} x \in [-2; 2] \\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty) \end{cases}$ , откуда  $x \in [-2; -1) \cup (1; 2]$ .  
Ответ:  $[-2; -1) \cup (1; 2]$ .

**51д)** Область определения функции  $y = \log_{2\sin x} \cos x$  задается условиями  $\begin{cases} \cos x > 0 \\ 2\sin x > 0 \text{ или} \\ 2\sin x \neq 1 \end{cases} \begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin x > 0 \\ \sin x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ . Первым двум неравенствам соответствуют углы  $x$ , расположенные в первой четверти, т.е.  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . В этом промежутке  $\sin x = \frac{1}{2}$  при  $x = \frac{\pi}{6}$ . Учтем периодичность функций синус и косинус. Получаем область определения  $D(y) = \left(2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .  
Ответ:  $\left(2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**52б)** Так как область определения функции  $y = f(x)$  — отрезок  $[-1; 2]$ , то область определения функции  $y = f(x+1)$  задается условием:  $-1 \leq x+1 \leq 2$ . Вычитая из всех частей неравенства число 1, найдем:  $-2 \leq x \leq 1$ . **Ответ:**  $[-2; 1]$ .



**53а)** Для нахождения области значений функции  $y = \cos^2 x - \cos x$  обозначим  $z = \cos x$ , где  $z \in [-1; 1]$ . Тогда функция имеет вид  $y = z^2 - z$ . Схематично изобразим график этой функции (парабола). Видно, что при изменении  $z$  в промежутке  $[-1; 1]$  функция  $y$  меняется в промежутке  $\left[-\frac{1}{4}; 2\right]$ , что и яв-

ляется областью значений данной функции. **Ответ:**  $\left[-\frac{1}{4}; 2\right]$ .

**53в)** Для нахождения области значений функции  $y = 3\cos x - 4\sin x - 1$  преобразуем ее, используя метод вспомогательного угла.

Получаем:  $y = 5\left(\frac{3}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x\right) - 1 = 5(\cos \varphi \cos x - \sin \varphi \sin x) - 1 = 5\cos(x + \varphi) - 1$ . Так как  $\cos \varphi = \frac{3}{5}$  и  $\sin \varphi = \frac{4}{5}$ , то выполняется основное тригонометрическое тождество.

Очевидно, что  $-1 \leq \cos(x + \varphi) \leq 1$ . Умножим все части этого неравенства на положительное число 5. При этом знак неравенства сохраняется:  $-5 \leq 5\cos(x + \varphi) \leq 5$ . От всех частей вычтем число 1 и получим:  $-6 \leq 5\cos(x + \varphi) - 1 \leq 4$  или  $-6 \leq y \leq 4$ , что и является областью значений  $E(y)$ . **Ответ:**  $[-6; 4]$ .

**55б)** Найдем область определения функции  $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$ . Она задается условием  $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$ . Решая это неравенство, получим  $x \in \mathbb{R}$  — симметричное множество. Найдем

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log_a\left(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}\right) = \log_a\left(-x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \\ &= \log_a \frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \log_a \frac{x^2 + 1 - x^2}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \log_a\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^{-1} = \\ &= -\log_a\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = -f(x). \end{aligned}$$

Таким образом, получили  $f(-x) = -f(x)$ . Следовательно, функция  $f(x)$  нечетная (по определению).

**Ответ:** нечетная.

**60в)** Докажем, что функция  $f(x) = \sin x^2$  не является периодической. Предположим, что эта функция периодическая с периодом  $T$ . Тогда должно выполняться равенство  $f(x+T) = f(x)$  или  $\sin(x+T)^2 = \sin x^2$ . Перенесем член в левую часть  $\sin(x+T)^2 - \sin x^2 = 0$  и

преобразуем ее в произведение:  $2 \sin \frac{(x+T)^2 - x^2}{2} \cos \frac{(x+T)^2 + x^2}{2} = 0$ .

Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Рассмотрим эти случаи.

а)  $\sin \frac{(x+T)^2 - x^2}{2} = 0$ , откуда  $\frac{(x+T)^2 - x^2}{2} = \pi n$  или  $T(2x+T) = 2\pi n$  или  $T^2 + 2xT - 2\pi n = 0$ . Решая это квадратное уравнение, найдем  $T = -x \pm \sqrt{x^2 + 2\pi n}$ . Видно, что  $T$  не является числом (зависит от  $x$ ) и не может быть периодом.

б)  $\cos \frac{(x+T)^2 + x^2}{2} = 0$ , откуда  $\frac{(x+T)^2 + x^2}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$  или  $(x+T)^2 + x^2 = \pi(2n+1)$  или  $(x+T)^2 = \pi(2n+1) - x^2$  и  $T = -x \pm \sqrt{\pi(2n+1) - x^2}$ . Видно, что  $T$  не является числом и не может быть периодом.

Таким образом, данная функция не является периодической.

Ответ: доказано.

**63а)** Сравним числа  $\log_2 3$  и  $\log_5 8$ . Для этого сначала сравним числа с числом  $\frac{3}{2}$ . Получаем:  $3 > 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$  и  $\log_2 3 > \log_2 2\sqrt{2} = \frac{3}{2}$ ;  $8 < 5^{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{5}$  и  $\log_5 8 < \log_5 5\sqrt{5} = \frac{3}{2}$ . Имеем:  $\log_2 3 > \frac{3}{2} > \log_5 8$ . Ответ:  $\log_2 3 > \log_5 8$ .

**63б)** Для сравнения чисел  $\log_9 10$  и  $\lg 11$  учтем, что эти числа положительные и найдем их отношение  $\frac{\lg 11}{\log_9 10} = \lg 11 \cdot \lg 9$ . Для оценки этого произведения используем неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического чисел:  $\sqrt{\lg 11 \cdot \lg 9} < \frac{\lg 11 + \lg 9}{2} = \frac{\lg(11 \cdot 9)}{2} = \frac{\lg 99}{2} < \frac{\lg 100}{2} = \frac{2}{2} = 1$ . Так как  $\sqrt{\lg 11 \cdot \lg 9} < 1$ ,

то и  $\lg 11 \cdot \lg 9 < 1$ , т.е.  $\frac{\lg 11}{\log_9 10} < 1$ , откуда  $\lg 11 < \log_9 10$ .

Ответ:  $\lg 11 < \log_9 10$ .

**65)** Пусть функция  $y = f(x)$  возрастает, т.е. если  $x_2 > x_1$ , то и  $f(x_2) > f(x_1)$ . Рассмотрим функцию  $y(x) = kf(x)$  в точках  $x_2$  и  $x_1$ . Разность значений функции в этих точках:  $y(x_1) - y(x_2) = kf(x_2) -$

$-kf(x_1) = k(f(x_2) - f(x_1))$ . Второй множитель  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , поэтому знак произведения определяется знаком  $k$ : при  $k > 0$  функция  $y = kf(x)$  возрастает, при  $k < 0$  — убывает.

Ответ: при  $k > 0$  возрастающая, при  $k < 0$  убывающая функция.

**68а)** Для функции  $f(x) = ax + b$  найдем  $f(f(x)) = f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + b(a + 1)$ . По условию задачи  $f(f(x)) = f(x)$  для любого  $x$ , т.е.  $a^2x + b(a + 1) = ax + b$ . Для выполнения этого равенства необходимо, чтобы коэффициенты при  $x$  и свободные члены

были равны. Получим уравнения:  $\begin{cases} a^2 = a \\ b(a + 1) = b \end{cases}$  или  $\begin{cases} a(a - 1) = 0 \\ ab = 0 \end{cases}$ .

Такая система имеет два решения:  $a = 0$ ,  $b \in R$  (тогда  $f(x) = b$ ) и  $a = 1$ ,  $b = 0$  (тогда  $f(x) = x$ ). Ответ:  $f(x) = b$  и  $f(x) = x$ .

**69а)** Для функции  $f(x) = 3 - x$  найдем  $f_2(x) = f(f(x)) = f(3 - x) = -3 - (3 - x) = x$ ;  $f_3(x) = f(f(f(x))) = f(x) = 3 - x$  и т.д. Таким образом

$$f_n(x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{если } n \text{ нечетное} \\ x, & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases}$$

Область определения функции  $D(f_n) = R$ .

Ответ:  $f_n(x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{если } n \text{ нечетное} \\ x, & \text{если } n \text{ четное,} \end{cases} \quad D(f_n) = R.$

**70а)** Найдем функцию, обратную функции  $y = \frac{1}{ax + b}$ . Выразим

из этого равенства  $x$ . Получаем:  $axy + by = 1$ , откуда  $x = \frac{1 - by}{ay}$ .

Введем привычные обозначения для аргумента и самой функции

и получим обратную функцию  $y = \frac{1 - bx}{ax}$ . По условию функция

$y = \frac{1}{ax + b}$  совпадает с обратной  $y = \frac{1 - bx}{ax}$ . Получаем уравнение:

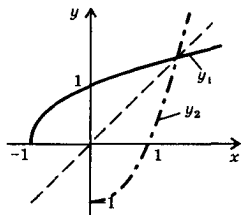
$$\frac{1}{ax + b} = \frac{1 - bx}{ax} \quad \text{или} \quad ax = (ax + b)(1 - bx) \quad \text{или} \quad ax = ax - abx^2 + b - b^2x$$

или  $abx^2 + b^2x - b = 0$ . Это равенство должно выполняться при любом значении  $x$ , поэтому все коэффициенты такого квадратного уравнения должны равняться нулю:  $ab = 0$ ,  $b^2 = 0$ ,  $-b = 0$ . Решение этой системы:  $a \neq 0$ ,  $b = 0$ . Поэтому искомая функция имеет вид

$y = \frac{1}{ax}$ . Ответ:  $\frac{1}{ax}$  ( $a \neq 0$ ).

**72а)** Для функции  $y = \sqrt{x + 1}$  ( $x \geq -1$ ) найдем обратную. Выразим из этого равенства  $x$ . Получаем:  $y^2 = x + 1$ , откуда  $x = y^2 - 1$ . Введем привычные обозначения для аргумента и самой функции и получим обратную функцию  $y = x^2 - 1$ . Построим графики функ-

ций  $y_1 = \sqrt{x+1}$  (сплошная линия) и  $y_2 = x^2 - 1$  ( $x \geq 0$ ) (штрих-пунктирная линия). Видно, что графики функций  $y_1$  и  $y_2$  симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

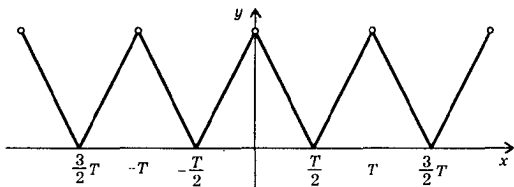


**Ответ:** см. решение.

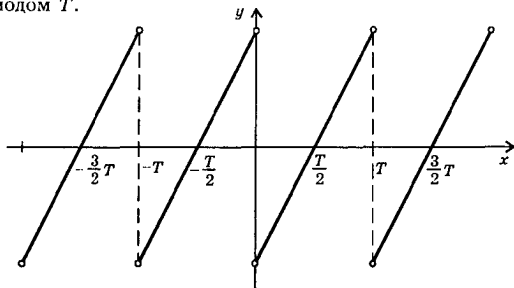
**74а)** Пусть функция  $f(x)$  четная. Рассмотрим значения функции в двух симметричных точках  $(-x_0)$  и  $x_0$ :  $f(-x_0) = f(x_0) = y_0$ . Таким образом, точки с координатами  $(-x_0; y_0)$  и  $(x_0; y_0)$  принадлежат графику функции. Эти точки имеют одну и ту же ординату и противоположные по знаку абсциссы. Следовательно, эти точки симметричны относительно оси ординат. То же можно сказать и про остальные точки графика. Поэтому график четной функции симметричен относительно оси ординат.

**Ответ:** доказано.

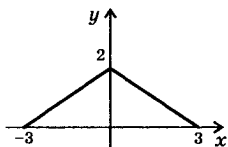
**75в)** Учтем, что график четной функции симметричен относительно оси ординат. Получим график четной периодической функции с периодом  $T$ .



Учтем, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат. Получим график нечетной периодической функции с периодом  $T$ .



**Ответ:** см. решение.



**776)** Для построения графика функции  $y = f(|x|)$  по заданному графику функции  $y = f(x)$  надо сохранить часть этого графика при  $x \geq 0$  и зеркально отразить ее влево относительно оси ординат.

Ответ: см. решение.

**81а)** Запишем данную функцию  $f(x) = 2\cos 2x + \sin^2 x$  в виде  $f(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin^2 x = 2\cos^2 x - \sin^2 x = 2(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 2 - 3\sin^2 x$ . Теперь найдем наибольшее и наименьшее значения этой функции. Учитывая ограниченность функции синус, имеем:  $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ . Умножим все части этого неравенства на отрицательное число  $(-3)$ . Знак неравенства меняется на противоположный:  $0 \geq -3\sin^2 x \geq -3$ . Ко всем частям неравенства прибавим число 2. Имеем:  $2 \geq 2 - 3\sin^2 x \geq -1$ , т.е.  $-1 \leq f(x) \leq 2$ . Поэтому наибольшее значение функции равно 2, наименьшее значение равно  $(-1)$ .

Ответ:  $\min f(x) = -1$ ,  $\max f(x) = 2$ .

**83а)** Асимптотой называется прямая линия, к которой график функции приближается сколь угодно близко. Функция  $y = \frac{x}{x-2}$  имеет вертикальную асимптоту  $x = 2$ , т.к. при  $x \rightarrow 2$  числитель дроби  $\frac{x}{x-2}$  стремится к числу 2, а знаменатель стремится к числу 0. Так как знаменатель становится очень малым, то функция  $y \rightarrow \pm \infty$ .

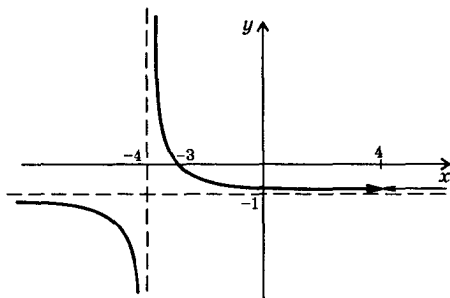
Функция  $y = \frac{x}{x-2}$  имеет горизонтальную асимптоту  $y = 1$ , т.к. при  $x \rightarrow \infty$  функция  $y \approx \frac{x}{x} = 1$  (т.е. можно при больших  $x$  пренебречь числом 2 в знаменателе дроби  $\frac{x}{x-2}$ ).

Ответ:  $x = 2$  — вертикальная асимптота,  $y = 1$  — горизонтальная асимптота.

**846)** Преобразуем данную функцию. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим ее. Получаем:

$y = \frac{12 + x - x^2}{x^2 - 16} = \frac{-(x-4)(x+3)}{(x-4)(x+4)} = -\frac{x+3}{x+4}$ . Таким образом, построим график функции  $y = -\frac{x+3}{x+4}$ . Этот график пересекает ось абсцисс в

точке  $x = -3$  и ось ординат — в точке  $y = -\frac{3}{4}$ . График функции имеет вертикальную асимптоту  $x = -4$  и горизонтальную асимпто-

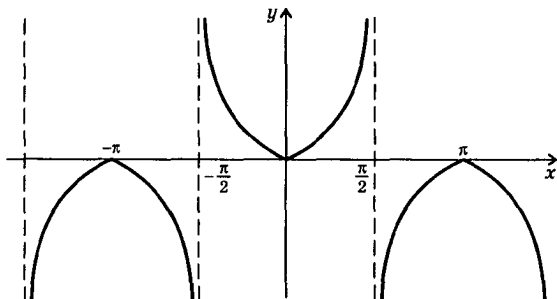


ту  $y = -1$ . Кроме того, данная функция в точке  $x = 4$  не определена (эта точка на графике отмечена стрелочками).

Ответ: см. решение.

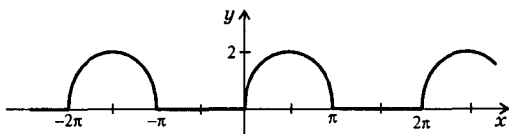
84в) Функцию  $y = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$  запишем в виде  $y = \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{\cos x} = \frac{|\sin x|}{\cos x}$ . Используя определение модуля, получим

$y = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{если } \sin x \geq 0 \\ -\operatorname{tg} x, & \text{если } \sin x < 0 \end{cases}$ . Построим график этой функции, учитывая ограничения на знак  $\sin x$ .



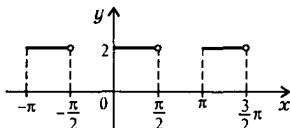
Ответ: см. решение.

85б) Функцию  $y = \sqrt{1 - \cos^2 x} + \sin x$  запишем в виде  $y = \sqrt{\sin^2 x} + \sin x = |\sin x| + \sin x = \begin{cases} 2 \sin x, & \text{если } \sin x \geq 0 \\ 0, & \text{если } \sin x < 0 \end{cases}$ . Теперь (учитывая ограничения) легко построить график этой функции.



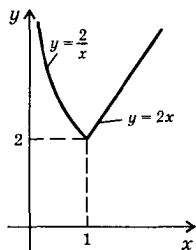
Ответ: см. решение.

85в) Очевидно, что функция  $y = \sin^2(\sqrt{\lg x}) + \cos^2(\sqrt{\lg x})$  может быть записана в виде  $y = 1$  при условии  $\lg x \geq 0$ . Теперь легко изобразить график этой функции. В точках  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$  (где  $n \in \mathbb{Z}$ ) функция  $\lg x$ , а следовательно, и данная функция не определена.



Ответ: см. решение.

86в) В функции  $y = 2^{|\log_2 x|+1}$  раскроем знак модуля. Если  $x \in (0; 1)$ , то  $\log_2 x < 0$  и функция  $y = 2^{-\log_2 x + 1} = (2^{\log_2 x})^{-1} \cdot 2 = x^{-1} \cdot 2 = \frac{2}{x}$ .



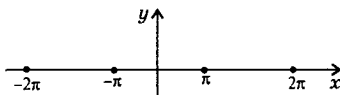
Если  $x \in [1; \infty)$ , то  $\log_2 x \geq 0$  и функция  $y = 2^{\log_2 x + 1} = 2^{\log_2 x} \cdot 2 = x \cdot 2 = 2x$ . Таким образом, данная функция имеет вид:

$$y = \begin{cases} \frac{2}{x}, & \text{если } x \in (0; 1) \text{ — гипербола,} \\ 2x, & \text{если } x \in [1; \infty) \text{ — прямая.} \end{cases}$$

Теперь с учетом ограничений построим график данной функции.

Ответ: см. решение.

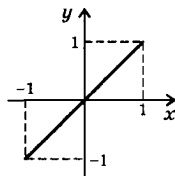
886) Область определения функции  $y = \sqrt{\log_{2000} \cos^{2000} x}$  задается условием:  $\log_{2000} \cos^{2000} x \geq 0$  или  $\log_{2000} \cos^{2000} x \geq \log_{2000} 1$ , откуда  $\cos^{2000} x \geq 1$ . Такое неравенство выполняется только при  $\cos x = \pm 1$ , откуда  $x = \pi n$  (где  $n \in \mathbb{Z}$ ). В этих точках значение функции  $y = 0$ . Итак, график данной функции состоит из отдельных точек с координатами  $(\pi n; 0)$ .



Ответ: см. решение.

**89а)** Область определения функции

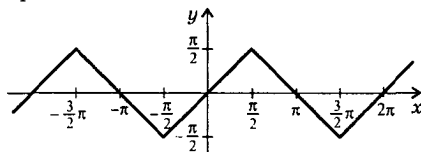
$y = \sin(\arcsin x)$  такая же, как у функции  $\arcsin x$ , т.е.  $D(y) = [-1; 1]$ . Учтем, что функции синус и арксинус взаимно обратные. Поэтому данную функцию можно записать в виде  $y = x$ . Построим график этой функции.



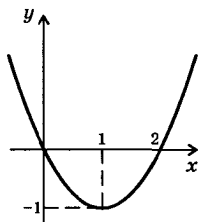
Ответ: см. решение.

**89б)** Область определения функции  $y = \arcsin(\sin x)$  такая же как у функции  $\sin x$ , т.е.  $D(y) = R$ . Данная функция периодическая с периодом  $2\pi$ . На промежутке  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  функции синус и арксинус взаимно обратные и данную функцию можно записать в виде  $y = x$ . Поэтому на этом промежутке график построить просто. Учтем, что график функции  $\sin x$  (а, следовательно, и данной функции) симметричен относительно  $x = \frac{\pi}{2}$ . Поэтому график легко построить и на промежутке  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ . Далее учитываем периодичность данной функции и строим график далее.

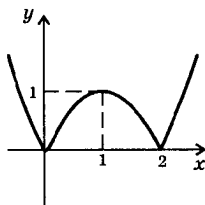
Ответ: см. решение.



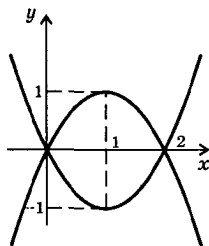
**92б)** Сначала построим график функции  $y = x^2 - 2x$  (парабола). Чтобы построить график функции  $y = |x^2 - 2x|$ , надо сохранить те части графика  $y = x^2 - 2x$ , для которых  $y \geq 0$ , а те части, для которых  $y < 0$ , надо зеркально отразить вверх относительно оси абсцисс. Наконец, чтобы построить окончательный график  $|y| = |x^2 - 2x|$ , надо предыдущий график  $y = |x^2 - 2x|$  сохранить и еще зеркально отразить вниз относительно оси абсцисс.



$$y = x^2 - 2x$$

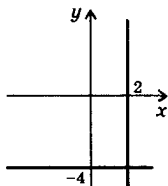


$$y = |x^2 - 2x|$$

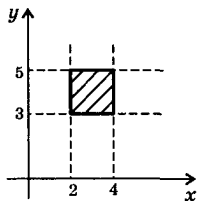


$$|y| = |x^2 - 2x|$$

Ответ: см. решение.



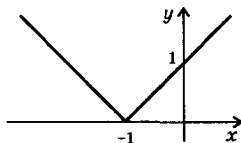
**92в)** Произведение  $(x - 2)(y + 4) = 0$ , если хотя бы один из множителей равен нулю. Получаем уравнения:  $x - 2 = 0$  (откуда  $x = 2$ ) и  $y + 4 = 0$  (откуда  $y = -4$ ). Таким образом, график состоит из двух прямых линий  $x = 2$  и  $y = -4$ . Ответ: см. решение.



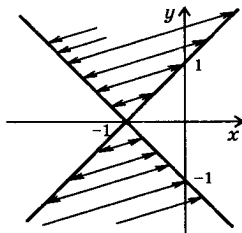
**93б)** Запишем данные неравенства  $|x - 3| \leq 1$ ,  $|y - 4| \leq 1$  в виде двойных неравенств:  $-1 \leq x - 3 \leq 1$ ,  $-1 \leq y - 4 \leq 1$  или  $2 \leq x \leq 4$ ,  $3 \leq y \leq 5$ . Эти неравенства определяют внутренние точки и границы квадрата со стороной 2.

Ответ: см. решение.

**93в)** Сначала построим границу данного множества точек  $|y| = |x + 1|$ . Построим график функции  $y = |x + 1|$ . Чтобы получить график  $|y| = |x + 1|$ , надо сохранить график  $y = |x + 1|$  и зеркально отразить его вниз относительно оси абсцисс. Построенные линии



$$y = |x + 1|$$



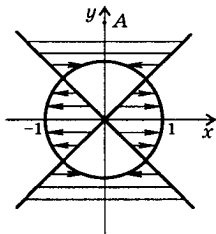
$$|y| > |x + 1|$$

разбили плоскость на четыре сектора. Определим, какие точки удовлетворяют неравенству  $|y| > |x + 1|$ . Для этого из каждого сектора выберем по контрольной точке. Например, для точки  $x = -1$ ,  $y = 1$  неравенство выполнено:  $|1| > |-1 + 1|$ . Следовательно, все точки этого же сектора удовлетворяют неравенству.

Множество искомых точек показано штриховкой. Стрелки показывают, что данное неравенство строгое и границы в множество точек не входят. Ответ: см. решение.

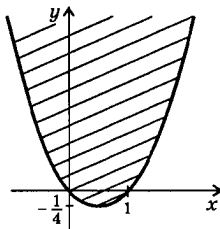
**94а)** Для построения множества точек, координаты которых удовлетворяют неравенству  $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1} \leq 0$ , используем метод интервалов. Числитель этой дроби обращается в нуль, если  $x^2 - y^2 = 0$ , откуда  $y = \pm x$  (биссектрисы координатных углов). Знаменатель равен нулю, если  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  (окружность радиуса 1 с центром в начале координат). Построим эти линии. Линии разбили координатную плоскость на ряд областей. Легко проверить, что координаты точки  $A(0; 2)$  удовлетворяют неравенству  $\frac{0^2 - 2^2}{0^2 + 2^2 - 1} \leq 0$ .

Далее используем метод интервалов: при переходе в каждую соседнюю область знак выражения  $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1}$  меняется на противоположный. Штриховкой показаны искомые точки. При этом точки окружности не входят, т.к. знаменатель дроби не должен равняться нулю. Ответ: см. решение.



**94в)** Так как обе части неравенства  $\sqrt{x+y} \geq |x|$  неотрицательны, то возведем их в квадрат. При этом знак неравенства не меняется:  $x+y \geq |x|^2$ . Учтем, что  $|x|^2 = x^2$ . Тогда получаем:  $y \geq x^2 - x$ . Построим множество таких точек.

Ответ: см. решение.

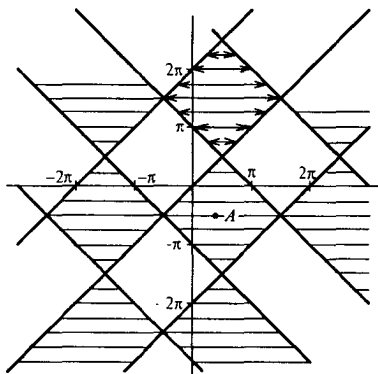


**96е)** Сначала вместо неравенства  $\sin x > \sin y$  рассмотрим равенство  $\sin x = \sin y$  и найдем более простую связь между переменными  $x$  и  $y$ . Перенесем все члены в правую часть и преобразуем ее в произведение. Получаем:  $0 = \sin y - \sin x$  или  $2\sin \frac{y-x}{2} \cos \frac{y+x}{2} = 0$ . Рассмотрим два случая:

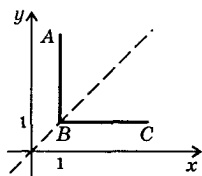
а)  $\sin \frac{y-x}{2} = 0$ , тогда  $\frac{y-x}{2} = \pi n$ , откуда  $y = x + 2\pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

б)  $\cos \frac{y+x}{2} = 0$ , тогда  $\frac{y+x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ , откуда  $y = -x + \pi(2k+1)$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

Построим прямые  $y = x + 2\pi n$  и  $y = -x + \pi(2k+1)$ . Эти прямые разбили координатную плоскость на отдельные квадраты. Например, координаты точки  $A \left( \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right)$  удовлетворяют неравенству  $\sin x > \sin y$ . Поэтому все точки этого квадрата также удовлетворяют неравенству. Учтем метод интервалов: при пересечении границ знак неравенства меняется на противоположный. Искомые точки отмечены штриховкой. Так как неравенство строгое, то границы в требуемое множество точек не входят.



Ответ: см. решение.



**96ж)** Для равенства  $\min(x; y) = 1$  рассмотрим два случая.

а) Если  $x \leq y$ , то наименьшее из чисел  $x$  и  $y$  число  $x$  и оно равно 1, т.е.  $x = 1$ .

б) Если  $x > y$ , то наименьшее из чисел  $x$  и  $y$  число  $y$  и оно равно 1, т.е.  $y = 1$ .

Таким образом, надо построить прямую  $x = 1$  (если  $x \leq y$  или  $1 \leq y$ ) и прямую  $y = 1$  (если  $x > y$  или  $x > 1$ ). Итак, множество точек угла  $ABC$  удовлетворяют равенству  $\min(x; y) = 1$ .

Ответ: см. решение.

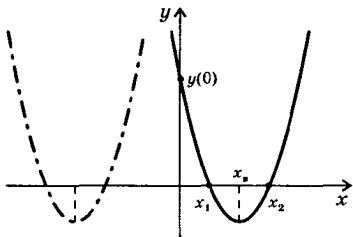
## § 3. Уравнения, неравенства и системы

**97а)** Чтобы квадратное уравнение  $x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0$  имело решение, надо чтобы его дискриминант  $D = 4(a-1)^2 - 4(2a+1) = 4(a^2 - 4a) = 4a(a-4)$  был неотрицательным. Решая это неравенство, находим  $a \in (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$ .

По формулам Виета произведение корней уравнения равно свободному члену  $2a+1$ . Если корни имеют разные знаки, то  $2a+1 < 0$ ,

т.е.  $a < -\frac{1}{2}$ .

Теперь найдем значения  $a$ , при которых оба корня данного уравнения положительны. Рассмотрим квадратичную функцию  $y = x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1$ . Ее графиком является парабола, направленная ветвями вверх. Если точки пересечения (корни уравнения)  $x_1$



и  $x_2$  положительны, то выполняются два условия: значение функции при  $x=0$  положительно (т.е.  $y(0) > 0$ ) и абсцисса вершины параболы положительна (т.е.  $x_v > 0$ ). Запишем эти условия через коэффициенты уравнения:  $2a+1 > 0$  и  $a-1 > 0$ , откуда  $a > 1$ . Учитывая, что уравнение имеет корни при  $a \in (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$ , находим  $a \geq 4$ . Аналогично находим, что при  $-\frac{1}{2} < a \leq 0$  корни уравнения отрицательны.

**Ответ:** имеет решения при  $a \in (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$ ; корни имеют разные знаки при  $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ ; корни положительны при  $a \in [4; \infty)$  и отрицательны при  $a \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ .

**100а)** Пусть  $x_1$  и  $x_2$  корни квадратного уравнения  $x^2 - 4x + p = 0$ . По условию  $x_1^2 + x_2^2 = 16$ . По формулам Виета:  $x_1 + x_2 = 4$  и  $x_1 x_2 = p$ . Поэтому для нахождения параметра  $p$  надо найти произведение корней. Равенство  $x_1 + x_2 = 4$  возведем в квадрат:  $x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 = 16$  или  $(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1 x_2 = 16$  и используем условие  $x_1^2 + x_2^2 = 16$ . Тогда получаем:  $16 + 2x_1 x_2 = 16$ , откуда  $x_1 x_2 = 0 = p$ .

**Ответ:**  $p = 0$ .

**101)** Если уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  не имеет действительных корней, то выражение  $ax^2 + bx + c$  имеет один и тот же знак при всех значениях  $x$ . Определим этот знак. Выражение  $a + b + c$  —

значение выражения  $ax^2 + bx + c$  при  $x = 1$ . Так как по условию  $a + b + c < 0$ , то и величина  $ax^2 + bx + c < 0$  при всех  $x$ . Так как  $c$  — значение выражения  $ax^2 + bx + c$  при  $x = 0$ , то  $c < 0$ .

**Ответ:**  $c < 0$ .

**104а)** Если кубическое уравнение  $2x^3 - x^2 + x + 1 = 0$  имеет рациональный корень  $x_0 = \frac{p}{q}$ , то  $p$  — делитель свободного члена 1 и  $q$  — делитель старшего коэффициента 2. Поэтому корни уравнения надо искать среди чисел  $\pm 1; \pm \frac{1}{2}$ . Проверим, что  $x_0 = -\frac{1}{2}$  — корень уравнения:  $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = 0$  — верное равенство.

Разделим уголком многочлен  $2x^3 - x^2 + x + 1$  на двучлен  $x + \frac{1}{2}$  (т.е. на  $x - x_0$ ). Получаем:

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - x^2 + x + 1 & x + \frac{1}{2} \\
 \hline
 2x^3 + x^2 & 2x^2 - 2x + 2 \\
 \hline
 -2x^2 + x & \\
 -2x^2 - x & \\
 \hline
 2x + 1 & \\
 2x + 1 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Таким образом, левую часть данного уравнения можно разложить на множители:  $2x^3 - x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 2x + 2)$ . Теперь надо решить квадратное уравнение  $2x^2 - 2x + 2 = 0$ . Оно корней не имеет, т.к. его дискриминант отрицательный. Поэтому данное кубическое уравнение имеет один корень  $x = -\frac{1}{2}$ . **Ответ:**  $-\frac{1}{2}$ .

**105а)** Для решения уравнения  $(x + 1)(x + 2)(x + 4)(x + 5) = 40$  изменим порядок умножения скобок:  $(x + 1)(x + 5)(x + 2)(x + 4) = 40$ . Перемножим первые две и последние две скобки:  $(x^2 + 6x + 5)(x^2 + 6x + 8) = 40$ . Введем новую неизвестную  $t = x^2 + 6x$  и получим уравнение:  $(t + 5)(t + 8) = 40$  или  $t^2 + 13t + 40 = 40$  или  $t(t + 13) = 0$ . Корни этого уравнения  $t_1 = 0$  и  $t_2 = -13$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем два уравнения.

а)  $x^2 + 6x = 0$  или  $x(x + 6) = 0$ , откуда  $x_1 = 0$  и  $x_2 = -6$ .

6)  $x^2 + 6x = -13$  или  $x^2 + 6x + 13 = 0$ . Это квадратное уравнение корней не имеет, т.к. дискриминант отрицательный.

Ответ: 0; -6.

**1056)** При решении уравнения  $(x-1)^5 + (x+3)^5 = 242(x+1)$  введем новую неизвестную  $t = x+1$ . Получаем уравнение:  $(t-2)^5 + (t+2)^5 = 242t$ . Используя бином Ньютона, возведем двучлены в левой части в пятую степень и приведем подобные члены. Имеем уравнение:  $2(t^5 + 10t^3 \cdot 2^2 + 5t \cdot 2^4) = 242t$  или  $t^5 + 40t^3 + 80t = 121t$  или  $t(t^4 + 40t^2 - 41) = 0$ . Одно решение очевидно  $t_1 = 0$ . Решая би-квадратное уравнение  $t^4 + 40t^2 - 41 = 0$ , найдем  $t^2 = 1$  (корни  $t_{2,3} = \pm 1$ ) и  $t^2 = -41$  (решений нет).

Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем три уравнения:  $x+1 = 0$  (откуда  $x_1 = -1$ ),  $x+1 = 1$  (тогда  $x_2 = 0$ ) и  $x+1 = -1$  (откуда  $x_3 = -2$ ). Итак, уравнение имеет три корня. Ответ: -1; 0; -2.

**1076)** Легко проверить, что значение  $x = 0$  не является корнем уравнения  $\frac{6x}{x^2 + 2x + 3} + \frac{11x}{x^2 + 7x + 3} = 2$ . Разделим числитель и знаме-

натель дробей на  $x$ . Имеем:  $\frac{6}{x+2+\frac{3}{x}} + \frac{11}{x+7+\frac{3}{x}} = 2$ . Введем новую неизвестную  $t = x + \frac{3}{x}$  и получим уравнение:  $\frac{6}{t+2} + \frac{11}{t+7} = 2$  или  $6(t+7) + 11(t+2) = 2(t+2)(t+7)$  или  $17t + 64 = 2t^2 + 18t + 28$  или  $0 = 2t^2 + t - 36$ . Корни этого квадратного уравнения  $t_1 = 4$  и  $t_2 = -\frac{9}{2}$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем два уравнения.

а)  $x + \frac{3}{x} = 4$  или  $x^2 - 4x + 3 = 0$ , откуда  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 3$ .

б)  $x + \frac{3}{x} = -\frac{9}{2}$  или  $2x^2 + 9x + 6 = 0$ , откуда  $x_{3,4} = \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{4}$ .

Ответ: 1; 3;  $\frac{-9 \pm \sqrt{33}}{4}$ .

**1086)** Убедимся, что значение  $x = 0$  не является корнем уравнения  $2x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$ . Разделим все члены на  $x^2$  и сгруппируем члены:  $2x^2 + x - 3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$  или  $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$ . Введем новую неизвестную  $t = x + \frac{1}{x}$  и возведем ее в квадрат:  $t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ , откуда  $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ . Тогда уравнение имеет вид:  $2(t^2 - 2) + t - 3 = 0$  или  $2t^2 + t - 7 = 0$ . Корни этого уравнения  $t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{57}}{4}$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем уравне-

ние:  $t = x + \frac{1}{x}$  или  $0 = x^2 - tx + 1$ , корни которого  $x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2}$ .

Подставив значения  $t$ , найдем:  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{57} \pm \sqrt{48 \pm 2\sqrt{57}}}{8}$ , т.е.  $x_{1,2} =$   
 $= \frac{-1 + \sqrt{57} \pm \sqrt{48 \pm 2\sqrt{57}}}{8}$  и  $x_{3,4} = \frac{-1 - \sqrt{57} \pm \sqrt{48 \pm 2\sqrt{57}}}{8}$ .

Ответ:  $\frac{-1 + \sqrt{57} \pm \sqrt{48 \pm 2\sqrt{57}}}{8}$ ;  $\frac{-1 - \sqrt{57} \pm \sqrt{48 \pm 2\sqrt{57}}}{8}$ .

**110а)** В уравнении  $x^4 + 4x - 1 = 0$  разложим левую часть на множители, используя формулу для разности квадратов:  $(x^4 + 2x^2 + 1) - (2x^2 - 4x + 2) = 0$  или  $(x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2 = 0$  или  $(x^2 + 1 + \sqrt{2}x - \sqrt{2})(x^2 + 1 - \sqrt{2}x + \sqrt{2}) = 0$ . Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем два квадратных уравнения.

$$\text{а) } x^2 + \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} = 0, \quad \text{корни} \quad x_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4(1 - \sqrt{2})}}{2} =$$

$$= \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}.$$

б)  $x^2 - \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2} = 0$ , корней не имеет, т.к. дискриминант отрицательный.

Ответ:  $\frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}$ .

**112а)** Уравнение  $x^2 + \frac{9x^2}{(3+x)^2} = 7$  запишем в виде  $x^2 + \left(\frac{3x}{3+x}\right)^2 = 7$  и в левой части выделим полный квадрат разности выражений:

$$\left(x^2 - 2x \cdot \frac{3x}{3+x} + \left(\frac{3x}{3+x}\right)^2\right) + \frac{6x^2}{3+x} = 7 \quad \text{или} \quad \left(x - \frac{3x}{3+x}\right)^2 + \frac{6x^2}{3+x} = 7 \quad \text{или}$$

$$\left(\frac{x^2}{3+x}\right)^2 + 6\frac{x^2}{3+x} - 7 = 0. \quad \text{Введем новую неизвестную } t = \frac{x^2}{3+x} \quad \text{и по-}$$

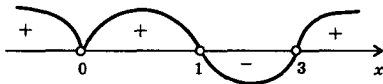
лучим квадратное уравнение  $t^2 + 6t - 7 = 0$ , корни которого  $t_1 = -7$  и  $t_2 = 1$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем уравнения.

а)  $\frac{x^2}{3+x} = -7$  или  $x^2 + 7x + 21 = 0$ . Это уравнение корней не имеет, т.к. дискриминант отрицательный.

$$6) \frac{x^2}{3+x} = 1 \text{ или } x^2 - x - 3 = 0 \text{ Корни этого уравнения } x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}. \quad \text{Ответ: } \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

1136) В левой части уравнения  $x^2 - 2x - 3 = |3x - 3|$  выделим квадрат разности чисел. Запишем уравнение в виде:  $(x^2 - 2x + 1) - 4 = 3|x - 1|$  или  $(x - 1)^2 - 4 = 3|x - 1|$ . Учтем, что  $a^2 = |a|^2$ . Тогда получим:  $|x - 1|^2 - 3|x - 1| - 4 = 0$ . Введем новую неизвестную  $t = |x - 1|$ . Имеем квадратное уравнение  $t^2 - 3t - 4 = 0$ , корни которого  $t_1 = 4$  и  $t_2 = -1$  (не подходит, т.к.  $t \geq 0$ ). Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Получаем уравнение:  $|x - 1| = 4$ , откуда  $x - 1 = \pm 4$  и  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = -3$ . Ответ: 5; -3.

118а) Так как левая часть неравенства  $|x^2 - 2x| < x$  неотрицательна, то и правая часть должна быть неотрицательной (т.е.  $x \geq 0$ ). Возведем обе неотрицательные части в квадрат. При этом знак неравенства не меняется:  $(x^2 - 2x)^2 < x^2$ . Запишем неравенство в виде  $(x^2 - 2x)^2 - x^2 < 0$  и разложим левую часть на множители:  $(x^2 - 2x + x)(x^2 - 2x - x) < 0$  или  $(x^2 - x)(x^2 - 3x) < 0$  или  $x^2(x - 1) \times (x - 3) < 0$ . Решим это неравенство методом интервалов. Получаем  $x \in (1; 3)$ .



Ответ: (1; 3).

120а) Для доказательства неравенства  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$  используем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  ( $a \geq 0, b \geq 0$ ). Получаем:  $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2} = |ab| \geq ab$ . Имеем:  $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$ ,  $\frac{b^2 + c^2}{2} \geq bc$ ,  $\frac{a^2 + c^2}{2} \geq ac$ . По-членно сложим эти три неравенства одного знака:  $\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 + c^2}{2} \geq ab + bc + ac$  или  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ . Причем неравенство становится равенством только при  $a = b = c$ .

Ответ: доказано.

1256) Запишем систему уравнений 
$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21 \\ y^2 - 2xy + 15 = 0 \end{cases} \text{ в виде}$$

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21 \\ y^2 - 2xy = -15 \end{cases} \text{ Умножим первое уравнение на 5, второе — на 7.}$$

Имеем:  $\begin{cases} 5x^2 - 5xy + 5y^2 = 105 \\ 7y^2 - 14xy = -105 \end{cases}$ . Сложим уравнения системы:  $5x^2 - 5xy + 5y^2 + 7y^2 - 14xy = 0$  или  $5x^2 - 19yx + 12y^2 = 0$ . Решим это однородное квадратное уравнение, считая величину  $y$  постоянной:  $x = \frac{19y \pm \sqrt{361y^2 - 240y^2}}{10} = \frac{19y \pm 11y}{10}$ , т.е.  $x = 3y$  и  $x = \frac{4}{5}y$ . Подставим эти величины во второе уравнение данной системы.

а) Если  $x = 3y$ , то получаем:  $y^2 - 2 \cdot 3y \cdot y + 15 = 0$  или  $y^2 = 3$  и  $y_{1,2} = \pm\sqrt{3}$  и  $x_{1,2} = \pm 3\sqrt{3}$ .

б) Если  $x = \frac{4}{5}y$ , то имеем:  $y^2 - 2 \cdot \frac{4}{5}y \cdot y + 15 = 0$  или  $-\frac{3}{5}y^2 + 15 = 0$  или  $y^2 = 25$  и  $y_{3,4} = \pm 5$  и  $y_{3,4} = \pm 4$ .

Ответ:  $(3\sqrt{3}; \sqrt{3}), (-3\sqrt{3}; -\sqrt{3}), (4; 5), (-4; -5)$ .

**1266)** Из первого уравнения системы  $\begin{cases} |x-1| + |y-2| = 1 \\ |y| + |x-1| = 3 \end{cases}$  выч-

тем второе:  $|y-2| - y = -2$  или  $|y-2| = y-2$ . Очевидно, что решение этого уравнения  $y-2 \geq 0$ , т.е.  $y \geq 2$ . Из второго уравнения  $|x-1| = 3-y$ . Так как левая часть неотрицательна, то и правая часть неотрицательна, т.е.  $3-y \geq 0$ , откуда  $y \leq 3$ . Пусть  $y = t$ , решим уравнение  $|x-1| = 3-t$ . Получаем:  $x-1 = \pm(3-t)$ , откуда  $x = 1 \pm (3-t)$  или  $x = 4-t$  и  $x = t-2$ .

Итак, решения системы:  $(4-t; t), (t-2; t)$ , где  $t \in [2; 3]$ .

Ответ:  $(4-t; t), (t-2; t)$ , где  $t \in [2; 3]$ .

**1286)** Для решения симметричной системы уравнений

$\begin{cases} x+y+xy=0 \\ x^3+y^3+x^3y^3=12 \end{cases}$  введем новые неизвестные  $a = x+y$ ,  $b = xy$  и учтем, что  $x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = a^3 - 3ba$ . Тогда система

имеет вид  $\begin{cases} a+b=0 \\ a^3-3ab+b^3=12 \end{cases}$ . Из первого уравнения выразим  $b = -a$  и подставим во второе уравнение:  $a^3 - 3a(-a) + (-a)^3 = 12$  или  $3a^2 = 12$ , откуда  $a = \pm 2$ . Теперь найдем  $b = \pm 2$ . Вернемся к старым неизвестным  $x$  и  $y$ . Получаем системы уравнений.

а)  $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-2 \end{cases}$  Из первого уравнения  $y = 2-x$  и подставим во второе:  $x(2-x) = -2$  или  $0 = x^2 - 2x - 2$ . Корни этого уравнения  $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$ , тогда  $y_{1,2} = 2-x = 2 - (1 \pm \sqrt{3}) = 1 \mp \sqrt{3}$ .

б)  $\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=2 \end{cases}$ . Из первого уравнения выразим  $y = -2-x$  и под-

ставим во второе:  $x(-2-x) = 2$  или  $0 = x^2 + 2x + 2$ . Это квадратное уравнение (и система) решений не имеет.

Ответ:  $(1 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$ ,  $(1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$ .

1296) В первом уравнении системы 
$$\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10 \\ (x - y)(xy + 1) = -3 \end{cases}$$
 рас-

кроем скобки: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x^2y^2 + 1 = 10 \\ (x - y)(xy + 1) = -3 \end{cases}$$
. Введем новые неизвестные

$a = x - y$ ,  $b = xy + 1$ . Учтем, то  $xy = b - 1$  и  $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = a^2 + 2(b - 1) = a^2 + 2b - 2$ . Тогда система имеет вид:

$$\begin{cases} a^2 + 2b - 2 + (b - 1)^2 + 1 = 10 \\ ab = -3 \end{cases}$$
 или 
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ ab = -3 \end{cases}$$
. Умножим второе

уравнение на 2: 
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ 2ab = -6 \end{cases}$$
. Сложим и вычтем уравнения систе-

мы: 
$$\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = 4 \\ a^2 - 2ab + b^2 = 16 \end{cases}$$
 или 
$$\begin{cases} (a + b)^2 = 4 \\ (a - b)^2 = 16 \end{cases}$$
, откуда 
$$\begin{cases} a + b = \pm 2 \\ a - b = \pm 4 \end{cases}$$
. Далее надо рассмотреть четыре случая.

а) 
$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = 4 \end{cases}$$
, откуда  $a = 3$ ,  $b = -1$ . Получаем: 
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ xy + 1 = -1 \end{cases}$$
 или

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ xy = -2 \end{cases}$$
. Из первого уравнения выразим  $x = y + 3$  и подставим во второе:  $(y + 3)y = -2$  или  $y^2 + 3y + 2 = 0$ , откуда  $y_1 = -1$  ( $x_1 = 2$ ) и  $y_2 = -2$  ( $x_2 = 1$ ).

б) 
$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = -4 \end{cases}$$
, откуда  $a = -1$ ,  $b = 3$ . Получаем: 
$$\begin{cases} x - y = -1 \\ xy + 1 = 3 \end{cases}$$
 или

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ xy = 2 \end{cases}$$
. Из первого уравнения выразим  $x = y - 1$  и подставим во второе:  $(y - 1)y = 2$  или  $y^2 - y - 2 = 0$ , откуда  $y_3 = -1$  ( $x_3 = -2$ ) и  $y_4 = 2$  ( $x_4 = 1$ ).

в) 
$$\begin{cases} a + b = -2 \\ a - b = 4 \end{cases}$$
, откуда  $a = 1$ ,  $b = -3$ . Получаем: 
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ xy + 1 = -3 \end{cases}$$
 или

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = -4 \end{cases}$$
. Из первого уравнения выразим  $x = y + 1$  и подставим во второе:  $(y + 1)y = -4$  или  $y^2 + y + 4 = 0$ . Это уравнение корней не имеет.

$$г) \begin{cases} a + b = -2 \\ a - b = -4 \end{cases}, \text{ откуда } a = -3, b = 1. \text{ Получаем: } \begin{cases} x - y = -3 \\ xy + 1 = 1 \end{cases} \text{ или}$$

$\begin{cases} x - y = -3 \\ xy = 0 \end{cases}$ . Из первого уравнения выразим  $x = y - 3$  и подставим во второе:  $(y - 3)y = 0$ , откуда  $y_5 = 3$  ( $x_5 = 0$ ) и  $y_6 = 0$  ( $x_6 = -3$ ).

Итак, данная система уравнений имеет шесть решений.

Ответ: (2; -1), (1; -2), (-2; -1), (1; 2), (0; 3), (-3; 0).

$$1336) \text{ Систему } \begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{6}{5} \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{3}{4} \\ \frac{zy}{z+y} = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ запишем в виде } \begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{5}{6} \\ \frac{x+z}{xz} = \frac{4}{3} \\ \frac{z+y}{zy} = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{4}{3} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Введем новые неизвестные } a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z} \text{ и полу-}$$

$$\text{чим систему } \begin{cases} a + b = \frac{5}{6} \\ a + c = \frac{4}{3} \\ b + c = \frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Сложим все три уравнения системы:}$$

$$2a + 2b + 2c = \frac{22}{6}, \text{ откуда } a + b + c = \frac{11}{6}. \text{ Из этого равенства вычтем}$$

$$\text{первое уравнение: } c = \frac{11}{6} - \frac{5}{6} = 1, \text{ тогда } z = \frac{1}{c} = 1. \text{ Аналогично, вы-}$$

$$\text{читая второе и третье уравнения, найдем } b = \frac{11}{6} - \frac{4}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ и}$$

$$y = \frac{1}{b} = 2; a = \frac{11}{6} - \frac{3}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ и } x = \frac{1}{a} = 3. \text{ Итак, система имеет}$$

единственное решение (3; 2; 1). Ответ: (3; 2; 1).

136) Пусть дано трехзначное число  $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$  (где  $x$  — цифра сотен,  $y$  — цифра десятков,  $z$  — цифра единиц). Так как сумма цифр числа равна 17, то получаем первое уравнение  $x + y + z = 17$ . Сумма квадратов цифр равна 109, поэтому имеем второе уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 = 109$ . Если из данного числа вычесть

495, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке,  $zyx = 100z + 10y + x$ . Тогда имеем третье уравнение:  $100x + 10y + z - 495 = 100z + 10y + x$  или  $99x - 99z = 495$  или  $x - z = 5$ .

Получаем систему уравнений 
$$\begin{cases} x + y + z = 17 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 109 \\ x - z = 5 \end{cases}$$
. Из третьего

уравнения выразим  $x = z + 5$  и подставим в первое уравнение:  $z + 5 + y + z = 17$  или  $y + 2z = 12$ , откуда  $y = 12 - 2z$ . Подставим  $x = z + 5$  и  $y = 12 - 2z$  во второе уравнение системы:  $(z + 5)^2 + (12 - 2z)^2 + z^2 = 109$  или  $z^2 + 10z + 25 + 144 - 48z + 4z^2 + z^2 = 109$  или  $6z^2 - 38z + 60 = 0$  или  $3z^2 - 19z + 30 = 0$ . Корни этого уравнения  $z_1 = 3$  и  $z_2 = \frac{10}{3}$  (не подходит, т.к.  $z$  — цифра). Теперь найдем  $x = z + 5 = 8$  и  $y = 12 - 2z = 6$ . Итак, данное число 863.

Ответ: 863.

137) Пусть  $l$  (м) — длина эскалатора,  $x$  (м/с) — скорость пассажира относительно эскалатора,  $y$  (м/с) — скорость эскалатора. Так как пассажир спускается по движущемуся эскалатору за 24 с, то получаем первое уравнение:  $l = 24(x + y)$ . По неподвижному эскалатору пассажир спускается за 42 с. Поэтому имеем второе уравнение  $l = 42x$ . Получили систему уравнений

$$\begin{cases} l = 24(x + y) \\ l = 42x \end{cases}$$
. Время,

за которое пассажир спустится, стоя на движущемся эскалаторе, равно  $t = \frac{l}{y}$ . Поэтому из системы исключим переменную  $x$ . Для этого первое уравнение умножим на 7, второе — на 4:

$$\begin{cases} 7l = 168x + 168y \\ 4l = 168x \end{cases}$$
. Вычтем из первого уравнения второе:  $3l = 168y$ ,

откуда  $\frac{l}{y} = \frac{168}{3} = 56$  (с). Ответ: 56 с.

140) Пусть портфель стоил  $x$  р., авторучка  $y$  р. и книга  $z$  р.

Если бы портфель стоил в 5 раз дешевле  $\left(\frac{x}{5}\right)$ , авторучка — в 2 раза

дешевле  $\left(\frac{y}{2}\right)$  и книга — в 2,5 раза дешевле  $\left(\frac{z}{2,5}\right)$ , то покупка стоила

бы 80 р. Получаем первое уравнение:  $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2,5} = 80$  или  $2x + 5y +$

$+ 4z = 800$ . Если бы портфель стоил в 2 раза дешевле  $\left(\frac{x}{2}\right)$ , книга —

в 3 раза дешевле  $\left(\frac{z}{3}\right)$ , авторучка — в 4 раза дешевле  $\left(\frac{y}{4}\right)$ , то по-

купка стоила бы 120 р. Имеем второе уравнение:  $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 120$

или  $6x + 3y + 4z = 1440$ . Получили систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4z = 800 \\ 6x + 3y + 4z = 1440 \end{cases}$$
 в которой неизвестных больше, чем уравнений.

Найдем стоимость всей покупки, т.е.  $x + y + z$ . Для этого сложим уравнения системы:  $8x + 8y + 8z = 2240$ , откуда  $x + y + z = \frac{2240}{8} = 280$  (р.) Теперь надо определить, что стоит дороже: портфель или авторучка ( $x$  или  $y$ ). Для этого исключим переменную  $z$ . Из второго уравнения вычтем первое:  $4x - 2y = 640$  или  $2x - y = 320$ . Запишем это равенство в виде:  $x - y = 320 - x$ . Так как стоимость всей покупки 280 р., то очевидно  $x < 280$ . Поэтому величина  $320 - x > 0$ , следовательно,  $x - y > 0$  или  $x > y$ , т.е. портфель дороже авторучки.

Ответ: 280 р., портфель дороже авторучки.

**144а)** Так как левая часть уравнения  $\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$  неотрицательна, то и правая часть неотрицательна, т.е.  $x - 1 \geq 0$  или  $x \geq 1$ . Возведем обе части уравнения в квадрат:  $1 - \sqrt{x^4 - x^2} = x^2 - 2x + 1$  или  $\sqrt{x^4 - x^2} = 2x - x^2$  или  $x\sqrt{x^2 - 1} = x(2 - x)$ . Было учтено, что  $x > 1$  и  $|x| = x$ . Так как  $x \neq 0$ , то разделим обе части уравнения на  $x$ :  $\sqrt{x^2 - 1} = 2 - x$ . Левая часть уравнения неотрицательна. Поэтому правая часть также неотрицательна, т.е.  $2 - x \geq 0$ , откуда  $x \leq 2$ . Возведем обе части уравнения в квадрат:  $x^2 - 1 = 4 - 4x + x^2$  или  $4x = 5$ , откуда  $x = \frac{5}{4}$ . Корень  $x = \frac{5}{4}$  входит в промежуток  $1 \leq x \leq 2$  и поэтому является решением данного уравнения.

Ответ:  $\frac{5}{4}$ .

**145б)** Для решения уравнения  $\sqrt[3]{10 - x} - \sqrt[3]{3 - x} = 1$  введем новые неизвестные  $a = \sqrt[3]{10 - x}$  и  $b = \sqrt[3]{3 - x}$ . Получаем первое уравнение  $a - b = 1$ . Возведем величины  $a$  и  $b$  в куб:  $a^3 = 10 - x$  и  $b^3 = 3 - x$ . Вычтем из первого равенства второе. Получим второе уравнение:  $a^3 - b^3 = 7$ . Итак, имеем систему уравнений 
$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a^3 - b^3 = 7 \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим  $a = b + 1$  и подставим во второе:  $(b + 1)^3 - b^3 = 7$  или  $(b + 1 - b)((b + 1)^2 + (b + 1)b + b^2) = 7$  или  $3b^2 + 3b + 1 = 7$  или  $b^2 + b - 2 = 0$ . Корни этого уравнения  $b_1 = 1$  и  $b_2 = -2$ . Используя равенство  $b^3 = 3 - x$ , найдем  $x = 3 - b^3$ . Получаем:  $x_1 = 3 - 1 = 2$  и  $x_2 = 3 - (-2)^3 = 11$ . Ответ: 2; 11.

**1466)** Так как левая часть уравнения  $\sqrt{1 - 2\cos x} = \sin x$  неотрицательна, то и правая часть должна быть неотрицательной, т.е.  $\sin x \geq 0$ . Возведем обе части уравнения в квадрат:  $1 - 2\cos x = \sin^2 x$  или  $1 - 2\cos x = 1 - \cos^2 x$  или  $\cos^2 x - 2\cos x = 0$  или  $\cos x \times (\cos x - 2) = 0$ . Так как произведение множителей равно нулю, то хотя бы один из них равен нулю. Получаем уравнения:  $\cos x = 0$  и  $\cos x - 2 = 0$  (или  $\cos x = 2$  и это уравнение решений не имеет). Решая уравнение  $\cos x = 0$  с дополнительным условием  $\sin x \geq 0$ , получаем  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$  (где  $n \in \mathbb{Z}$ ).

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$  (где  $n \in \mathbb{Z}$ ).

**147а)** Для решения уравнения  $\sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x - 2}} + \sqrt{x + 7 - 6\sqrt{x - 2}} = 2$  введем новую неизвестную  $t = \sqrt{x - 2} \geq 0$ . Тогда  $t^2 = x - 2$ , откуда  $x = t^2 + 2$ . Получаем уравнение:  $\sqrt{t^2 + 2 - 1 - 2t} + \sqrt{t^2 + 2 + 7 - 6t} = 2$  или  $\sqrt{t^2 - 2t + 1} + \sqrt{t^2 - 6t + 9} = 2$  или  $|t - 1| + |t - 3| = 2$ . Решением этого уравнения является промежуток  $1 \leq t \leq 3$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем:  $1 \leq \sqrt{x - 2} \leq 3$ . Возведем все неотрицательные части неравенства в квадрат. Знак неравенства при этом сохраняется:  $1 \leq x - 2 \leq 9$ . Ко всем частям неравенства прибавим число 2 и получим:  $3 \leq x \leq 11$ .

Ответ: [3; 11].

**1486)** ОДЗ уравнения  $\sqrt[4]{x(2-x)} + \sqrt[3]{x^4(2-x)^7(x+3)^5} + \sqrt[6]{(x-2)(x+1)x^2} + \sqrt[5]{(x+2)(x+6)} = 2$  задается условиями:

$$\begin{cases} x(2-x) \geq 0 \\ (x-2)(x+1)x^2 \geq 0, \end{cases}$$

т.к. подкоренные выражения радикалов четной степени должны быть неотрицательными. Решение первого неравенства  $0 \leq x \leq 2$ , решение второго неравенства:  $x \leq -1$ ,  $x = 0$ ,  $x \geq 2$ . Таким образом, ОДЗ уравнения состоит из двух точек:  $x = 0$  и  $x = 2$ . Теперь проверим, являются ли эти точки решением данного уравнения. При  $x = 0$  получаем:  $\sqrt[4]{0} + \sqrt[3]{0} + \sqrt[6]{0} + \sqrt[5]{2 \cdot 6} = 2$  (не

верное равенство), поэтому  $x = 0$  не корень уравнения. Для  $x = 2$  имеем:  $\sqrt[4]{0} - \sqrt[3]{0} + \sqrt[6]{0} + \sqrt[5]{4 \cdot 8} = 2$  (верное равенство). Следовательно,  $x = 2$  — единственное решение данного уравнения.

Ответ: 2.

**149а)** Легко проверить, что  $x = 1$  не является корнем уравнения  $\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} = 8\sqrt[3]{(x-1)^2}$ . Поэтому разделим все члены

уравнения на  $\sqrt[3]{(x-1)^2}$ . Получим:  $\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} + 2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} - 8 = 0$  и введем новую неизвестную  $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ .

Имеем квадратное уравнение  $t^2 + 2t - 8 = 0$ , корни которого  $t_1 = 2$  и  $t_2 = -4$ . Вернемся к неизвестной  $x$ . Получаем уравнения.

$$а) \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = 2 \text{ или } \frac{x+1}{x-1} = 8 \text{ или } x+1 = 8x-8, \text{ откуда } x = \frac{9}{7}.$$

$$б) \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = -4 \text{ или } \frac{x+1}{x-1} = -64 \text{ или } x+1 = -64x+64, \text{ откуда } x = \frac{63}{65}.$$

Ответ:  $\frac{9}{7}, \frac{63}{65}$ .

**151а)** В левой части уравнения  $\frac{\sqrt[7]{12+x}}{x} + \frac{\sqrt[7]{12+x}}{12} = \frac{64}{3}\sqrt[7]{x}$  при-

ведем дроби к общему знаменателю:  $\frac{\sqrt[7]{12+x}(12+x)}{12x} = \frac{64}{3}\sqrt[7]{x}$  или

$\sqrt[7]{12+x}(12+x) = 256x\sqrt[7]{x}$  или  $(12+x)^{\frac{8}{7}} = 256x^{\frac{8}{7}}$ . Возведем обе части уравнения в степень  $\frac{7}{8}$ . Имеем:  $|12+x| = 256^{\frac{1}{8}}|x|$  или  $|12+x| =$

$= 128|x|$ , тогда  $12+x = 128x$  (откуда  $x = \frac{12}{127}$ ) и  $12+x = -128x$  (откуда  $x = -\frac{12}{129} = -\frac{4}{43}$ ). Ответ:  $\frac{12}{127}, -\frac{4}{43}$ .

**154а)** ОДЗ неравенства  $\sqrt{x^2-3x+2} > 2x-5$  задается условием  $x^2-3x+2 \geq 0$ . Решение этого неравенства  $x \in (-\infty; 1] \cup [2; \infty)$ . Теперь надо рассмотреть два случая.

а) Если  $2x-5 < 0$  (т.е.  $x < 2,5$ ), то левая часть неравенства отрицательна, а правая отрицательна. Поэтому данное неравенство выполняется. С учетом ОДЗ решение неравенства в этом случае  $x \in (-\infty; 1] \cup [2; 2,5)$ .

6) Если  $2x - 5 \geq 0$  (т.е.  $x \geq 2,5$ ), то обе части данного неравенства неотрицательны. Поэтому возведем обе части в квадрат. При этом знак неравенства сохраняется. Получаем:  $x^2 - 3x + 2 > 4x^2 - 20x + 25$

или  $0 > 3x^2 - 17x + 23$ . Решение этого неравенства  $x \in \left( \frac{17 - \sqrt{13}}{6}; \frac{17 + \sqrt{13}}{6} \right)$ . С учетом ОДЗ и рассматриваемого промежутка  $x \geq 2,5$

решение в этом случае  $x \in \left[ 2,5; \frac{17 + \sqrt{13}}{6} \right)$ .

Объединяя решения двух рассмотренных случаев  $x \in (-\infty; 1] \cup [2; 2,5)$  и  $x \in \left[ 2,5; \frac{17 + \sqrt{13}}{6} \right)$ , найдем  $x \in (-\infty; 1] \cup \left[ 2; \frac{17 + \sqrt{13}}{6} \right)$ .

Ответ:  $(-\infty; 1] \cup \left[ 2; \frac{17 + \sqrt{13}}{6} \right)$ .

**1546)** ОДЗ неравенства  $\sqrt{3x - x^2} < 4 - x$  задается условием  $3x - x^2 \geq 0$ , откуда  $x \in [0; 3]$ . При таких значениях  $x$  правая часть  $4 - x$  неотрицательна. Поэтому возведем обе части в квадрат. Знак неравенства сохраняется. Получаем:  $3x - x^2 < 16 - 8x + x^2$  или  $0 < 2x^2 - 11x + 16$ . Это неравенство выполняется при всех значениях  $x$ . Следовательно, ОДЗ  $x \in [0; 3]$  является решением данного неравенства. Ответ:  $[0; 3]$ .

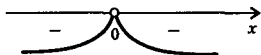
**155а)** ОДЗ неравенства  $\frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x} < 3$  задается условиями:

$1 - 4x^2 \geq 0$  и  $x \neq 0$ , откуда  $x \in \left[ -\frac{1}{2}; 0 \right) \cup \left( 0; \frac{1}{2} \right]$ . Запишем неравен-

ство в виде:  $\frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x} - 3 < 0$  или  $\frac{1 - 3x - \sqrt{1 - 4x^2}}{x} < 0$ . Для его ре-

шения используем метод интервалов. Найдем значения  $x$ , при которых числитель дроби равен нулю. Решим уравнение:  $1 - 3x - \sqrt{1 - 4x^2} = 0$  или  $1 - 3x = \sqrt{1 - 4x^2}$ . Учтем, что  $1 - 3x \geq 0$ , и возведем обе части в квадрат:  $1 - 6x + 9x^2 = 1 - 4x^2$  или  $13x^2 - 6x = 0$  или  $x(13x - 6) = 0$ . Корни этого уравнения  $x_1 = 0$  и  $x_2 = \frac{6}{13}$  (не подходит, т.к. не выполняется условие  $1 - 3x \geq 0$ ). Знаменатель выражения обращается в нуль также при  $x = 0$ . Определим знак дроби

$\frac{1 - 3x - \sqrt{1 - 4x^2}}{x}$ , например, при  $x = \frac{1}{2}$ . Получаем:  $\frac{1 - \frac{3}{2} - \sqrt{0}}{\frac{1}{2}} < 0$ .



Поэтому имеем диаграмму знаков этого выражения. Видно, что решение данного неравенства совпадает с его ОДЗ  $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$ .

Ответ:  $\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$ .

**160а)** Для решения системы  $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3 \\ 2x+y=7 \end{cases}$  введем

новые неизвестные  $a = \sqrt[3]{x+2y}$  и  $b = \sqrt[3]{x-y+2}$ . Тогда первое уравнение имеет вид  $a+b=3$ . Возведем переменные  $a$  и  $b$  в куб:  $a^3 = x+2y$  и  $b^3 = x-y+2$  и сложим эти равенства:  $a^3 + b^3 = 2x + y + 2$ , откуда  $2x + y = a^3 + b^3 - 2$ . Тогда второе уравнение имеет вид:  $a^3 + b^3 - 2 = 7$  или  $a^3 + b^3 = 9$ . Данная система принимает вид

$\begin{cases} a+b=3 \\ a^3+b^3=9 \end{cases}$ . Из первого уравнения выразим  $b = 3 - a$  и подставим во второе:  $a^3 + (3-a)^3 = 9$  или  $a^3 + 27 - 27a + 9a^2 - a^3 = 9$  или  $9a^2 - 27a + 18 = 0$  или  $a^2 - 3a + 2 = 0$ . Корни этого уравнения  $a_1 = 1$  (тогда  $b_1 = 3 - a = 2$ ) и  $a_2 = 2$  (тогда  $b_2 = 1$ ). Вернемся к старым неизвестным  $x$  и  $y$ . Получаем две системы, используя соотношения  $x+2y = a^3$  и  $x-y+2 = b^3$ .

а)  $\begin{cases} x+2y=1 \\ x-y+2=8 \end{cases}$  или  $\begin{cases} x+2y=1 \\ x-y=6 \end{cases}$ . Вычтем уравнения и полу-

чим:  $3y = -5$ , откуда  $y = -\frac{5}{3}$  и  $x = y + 6 = \frac{13}{3}$ .

б)  $\begin{cases} x+2y=8 \\ x-y+2=1 \end{cases}$  или  $\begin{cases} x+2y=8 \\ x-y=-1 \end{cases}$ . Вычтем уравнения и найдем:

$3y = 9$ , откуда  $y = 3$  и  $x = y - 1 = 3 - 1 = 2$ .

Ответ:  $\left(\frac{13}{3}; -\frac{5}{3}\right), (2; 3)$ .

**161б)** В системе  $\begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2} \\ xy - x - y = 0 \end{cases}$  сначала рассмотрим пер-

вое уравнение. Введем неизвестную  $t = \sqrt{\frac{6x}{x+y}}$  и запишем уравнение в виде:  $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$  или  $2t^2 - 5t + 2 = 0$ . Корни этого уравнения

$t_1 = 2$  и  $t_2 = \frac{1}{2}$ . Вернемся к старым неизвестным  $x$  и  $y$ . Получаем:

$\sqrt{\frac{6x}{x+y}} = 2$  или  $\frac{6x}{x+y} = 4$  или  $x = 2y$  и  $\sqrt{\frac{6x}{x+y}} = \frac{1}{2}$  или  $\frac{6x}{x+y} = \frac{1}{4}$  или  $y = 23x$ . Имеем две системы уравнений.

а)  $\begin{cases} x = 2y \\ xy - x - y = 0 \end{cases}$ . Подставим первое уравнение во второе:  $2y^2 - 2y - y = 0$  или  $y(2y - 3) = 0$ , откуда  $y_1 = 0$  (тогда  $x_1 = 0$ ) и  $y_2 = \frac{3}{2}$  (тогда  $x_2 = 3$ ). Однако решение  $x = 0$   $y = 0$  не подходит по ОДЗ (деление на нуль).

б)  $\begin{cases} y = 23x \\ xy - x - y = 0 \end{cases}$ . Подставим первое уравнение во второе:  $23x^2 - x - 23x = 0$  или  $x(23x - 24) = 0$ , откуда  $x_3 = 0$  (не подходит) и  $x_4 = \frac{24}{23}$  (тогда  $y_4 = 24$ ).

Ответ:  $\left(3; \frac{3}{2}\right), \left(\frac{24}{23}; 24\right)$ .

**163а)** При решении уравнения  $3 + 2\sin 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$  от функций  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$  перейдем к функциям  $\sin x$  и  $\cos x$ . Получаем:

$3 + 2\sin 2x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$  или  $3 + 2\sin 2x = \frac{1}{\sin x \cos x}$  или  $3 + 2\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$ . Введем новую неизвестную  $t = \sin 2x$ . Имеем уравнение:

$3 + 2t = \frac{2}{t}$  или  $2t^2 + 3t - 2 = 0$ . Корни этого уравнения  $t_1 = -2$  и  $t_2 = \frac{1}{2}$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Получаем уравнения:

$\sin 2x = -2$  (решений не имеет) и  $\sin 2x = \frac{1}{2}$  (решения  $2x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$  и  $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ).

Ответ:  $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**164а)** В уравнении  $|x| \sin x + x = 0$  раскроем модуль, рассмотрим два случая.

а) Если  $x \geq 0$ , то  $|x| = x$  и уравнение имеет вид:  $x \sin x + x = 0$  или  $x(\sin x + 1) = 0$ , откуда  $x = 0$  и  $\sin x + 1 = 0$  (или  $\sin x = -1$ ). Решим это уравнение:  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ . Учтем, что  $x \geq 0$ , поэтому  $n \in \mathbb{N}$ .

б) Если  $x < 0$ , то  $|x| = -x$  и уравнение имеет вид:  $-x \sin x + x = 0$ . Так как  $x \neq 0$ , то разделим все члены уравнения на  $x$ :  $-\sin x + 1 = 0$

или  $\sin x = 1$ . Решения этого уравнения  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ . Учтем, что  $x < 0$ , поэтому решение запишем в виде  $x = \frac{\pi}{2} - 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ .

Ответ:  $0; \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} - 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ .

**164г)** ОДЗ уравнения  $\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{-x}}{2}\right)^2 = \sin \frac{x}{2}$  задается условиями:  $x \geq 0$  и  $-x \geq 0$ , откуда  $x = 0$ . ОДЗ данного уравнения состоит из единственной точки  $x = 0$ . Легко проверить, что  $x = 0$  — корень данного уравнения. Ответ: 0.

**165в)** Для решения уравнения  $3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$  используем формулу понижения степени:  $3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(2\sin^2 x) = 2$  или  $3(\log_2 \sin x)^2 + 1 + 2\log_2 \sin x = 2$  или  $3(\log_2 \sin x)^2 + 2\log_2 \sin x - 1 = 0$ . Введем новую неизвестную  $t = \log_2 \sin x$ . Получаем квадратное уравнение  $3t^2 + 2t - 1 = 0$ , корни которого  $t_1 = -1$  и  $t_2 = \frac{1}{3}$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем уравнения.

а)  $\log_2 \sin x = -1$ , тогда  $\sin x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ , его решения  $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

б)  $\log_2 \sin x = \frac{1}{3}$ , тогда  $\sin x = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} > 1$  и это уравнение решений не имеет.

Ответ:  $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**166б)** Используем формулу для косинуса двойного аргумента:

$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$ . Разделим числитель и знаменатель этой дроби на  $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ . Имеем  $\cos \alpha = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ .

Ответ: доказано.

**167а)** Для решения уравнения  $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$  используем результаты задачи 166а. Получаем:  $\frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x = 2$  или  $2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x = 2 + 2\operatorname{tg}^2 x$  или  $\operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 2 = 0$ . Введем новую неиз-

вестную  $t = \operatorname{tg} x$  и получим кубическое уравнение:  $t^3 - 2t^2 + 3t - 2 = 0$ . Разложим его левую часть на множители:  $(t^3 - 2t^2 + t) + (2t - 2) = 0$  или  $t(t-1)^2 + 2(t-1) = 0$  или  $(t-1)(t^2 - t + 2) = 0$ . Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнения  $t-1=0$  (корень  $t=1$ ) и  $t^2 - t + 2 = 0$  (решений нет). Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Получаем уравнение:  $\operatorname{tg} x = 1$ , откуда  $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$  (где  $n \in \mathbb{Z}$ ). Ответ:  $\frac{\pi}{4} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

**168)** Выражение  $a \sin x + b \cos x$  умножим и разделим на  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

Получаем:  $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \sin x \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \cos x \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ .

Обозначим  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi$  и  $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi$ . Очевидно, это можно сделать, т.к. выполнено основное тригонометрическое тождество:

$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$ . Тогда данное выраже-

ние имеет вид:  $\sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) =$

$= A \sin(x + \varphi)$ , где  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  и  $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

Ответ: доказано.

**170)** Уравнение  $\sqrt{2} (\sin x + \cos x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$  запишем в виде:

$\sqrt{2} (\sin x + \cos x) = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$  или  $\sqrt{2} (\sin x + \cos x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$ .

Для решения этого симметричного уравнения введем новую неизвестную  $t = \sin x + \cos x$ . Возведем эту величину в квадрат:  $t^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$  или  $t^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \sin x \cos x$  или  $t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$ , откуда  $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$ . Тогда уравнение имеет

вид:  $\sqrt{2} t = \frac{2}{t^2 - 1}$  или  $\sqrt{2} t^3 - \sqrt{2} t - 2 = 0$ . Разложим левую часть

кубического уравнения на множители:  $(\sqrt{2} t^3 - 2\sqrt{2} t) + (\sqrt{2} t - 2) = 0$  или  $\sqrt{2} t(t^2 - 2) + \sqrt{2}(t - \sqrt{2}) = 0$  или  $\sqrt{2} t(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2}) + \sqrt{2}(t - \sqrt{2}) = 0$  или  $\sqrt{2}(t - \sqrt{2})(t^2 + t\sqrt{2} + 1) = 0$ . Произведение множителей равно нулю, если один из них равен нулю. Получаем уравнения:  $t - \sqrt{2} = 0$  (корень  $t = \sqrt{2}$ ) и  $t^2 + t\sqrt{2} + 1 = 0$  (решений нет). Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем:  $2 \sin x \cos x = \sin 2x =$

$= t^2 - 1 = 2 - 1 = 1$ . Решим уравнение  $\sin 2x = 1$ , откуда  $2x = \frac{\pi}{2} +$

$+ 2\pi n$  и  $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ . Так как находилось  $t^2$  (использовалось возведе-

ние в квадрат), то возможны посторонние решения. Проверка показывает, что  $n$  должно быть четным числом, т.е.  $n = 2m$ . Тогда решения данного уравнения  $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{4} + 2\pi m$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ .

1726) Для решения уравнения  $\sin^{100} x + \cos^{100} x = 1$  выполним оценки  $\sin^{100} x \leq \sin^2 x$  (равенство имеет место только при  $\sin x = 0$ ;  $\pm 1$ ) и  $\cos^{100} x \leq \cos^2 x$  (равенство будет только при  $\cos x = 0$ ;  $\pm 1$ ). Сложим неравенства одного знака. Получаем неравенство того же знака:  $\sin^{100} x + \cos^{100} x \leq \sin^2 x + \cos^2 x$  или  $\sin^{100} x + \cos^{100} x \leq 1$ . При этом неравенство совпадает с уравнением  $\sin^{100} x + \cos^{100} x = 1$  только при  $\sin x = 0$ ,  $\cos x = \pm 1$  или  $\sin x = \pm 1$ ,  $\cos x = 0$ . Решая эти уравнения, найдем  $x = \frac{\pi}{2} n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{2} n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

174) Проверим, что  $x = 0$  не является решением уравнения  $x^2 + 2x \sin(xy) + 1 = 0$ . Выразим величину  $\sin(xy) = -\frac{x^2 + 1}{2x}$ . Оценим правую часть этого уравнения  $\left(-\frac{x^2 + 1}{2x}\right)$ . Пусть  $x > 0$ , запишем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим чисел:  $\frac{x^2 + 1}{2} \geq \sqrt{x^2 \cdot 1}$  или  $\frac{x^2 + 1}{2} \geq x$  (равенство имеет место, если числа  $x$  и  $1$  равны, т.е.  $x = 1$ ), откуда  $\frac{x^2 + 1}{2x} \geq 1$  и  $-\frac{x^2 + 1}{2x} \leq -1$ . Учтем, что функция  $-\frac{x^2 + 1}{2x}$  нечетная. Область значений этой функции  $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$ . Поэтому уравнение  $\sin(xy) = -\frac{x^2 + 1}{2x}$  эквивалентно двум системам.

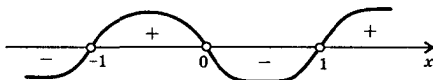
$$a) \begin{cases} x = 1 \\ \sin(xy) = -1, \text{ откуда } x = 1, y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \text{ (где } n \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x = -1 \\ \sin(xy) = 1, \text{ откуда } x = -1, y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{cases}$$

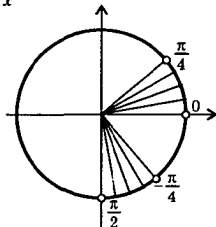
Ответ:  $\left(1; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), \left(-1; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

177в) Для решения неравенства  $\frac{2}{\operatorname{tg} x + 1} < 2 - \operatorname{tg} x$  введем новую неизвестную  $t = \operatorname{tg} x$  и получим рациональное неравенство  $\frac{2}{t + 1} < 2 - t$ . Решим его методом интервалов:  $\frac{2}{t + 1} + t - 2 < 0$  или

$\frac{2+t^2+t-2t-2}{t+1} < 0$  или  $\frac{t(t-1)}{t+1} < 0$ . Диаграмма знаков дроби  $\frac{t(t-1)}{t+1}$  приведена на рисунке. Из диаграммы получаем:  $t < -1$  и  $0 < t < 1$ .



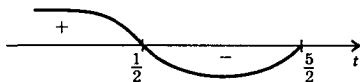
Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем неравенства:  $\operatorname{tg} x < -1$  и  $0 < \operatorname{tg} x < 1$ . Их удобно решить с помощью тригонометрического круга (области углов, удовлетворяющих неравенствам, заштрихованы). Учтем периодичность функции тангенс. Получаем



$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right) \cup \left(\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right), \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right) \cup \left(\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right), \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$

181) При решении неравенства  $\sqrt{5-2\sin x} \geq 6\sin x - 1$  введем новую неизвестную  $t = \sin x$  и получим иррациональное неравенство  $\sqrt{5-2t} \geq 6t - 1$ . Сначала решим это неравенство. Для разнообразия используем метод интервалов. Найдём корни уравнения  $\sqrt{5-2t} = 6t - 1$ . Возведём обе части в квадрат:  $5-2t = 36t^2 - 12t + 1$  или  $0 = 36t^2 - 10t - 4$  или  $0 = 18t^2 - 5t - 2$ . Корни этого уравнения  $t_1 = -\frac{2}{9}$  (не подходит, т.к.  $6t - 1 \geq 0$ ) и  $t_2 = \frac{1}{2}$ . Учтём ОДЗ неравенства  $5-2t \geq 0$  (т.е.  $t \leq \frac{5}{2}$ ) и запишем неравенство в виде  $\sqrt{5-2t} - 6t + 1 \geq 0$ . Определим знак выражения, например, при  $t = 0$ . Полу-



чаем  $\sqrt{5} + 1 > 0$  и построим диаграмму знаков выражения. Видно, что решение неравенства  $t \leq \frac{1}{2}$ . Вернемся к неизвестной  $x$ . Имеем

неравенство  $\sin x \leq \frac{1}{2}$ . Его решение  $x \in \left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right], \text{ где}$

$n \in \mathbb{Z}$ . Ответ:  $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right], \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$

**187а)** Для решения уравнения  $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x = 10$  найдем связь между основаниями. Получаем:  $\sqrt{5+\sqrt{24}} \cdot \sqrt{5-\sqrt{24}} = \sqrt{(5+\sqrt{24})(5-\sqrt{24})} = \sqrt{5^2-24} = \sqrt{1} = 1$ , тогда  $\sqrt{5-\sqrt{24}} = \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{24}}} = \left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^{-1}$ . Тогда уравнение имеет вид  $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^{-x} = 10$ . Введем новую неизвестную  $t = \left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x$ . Получаем уравнение:  $t + t^{-1} = 10$  или  $t^2 - 10t + 1 = 0$ . Корни этого уравнения  $t_{1,2} = 5 \pm \sqrt{24}$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем уравнения:  $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x = 5 + \sqrt{24}$  (откуда  $x = 2$ ) и  $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x = 5 - \sqrt{24} = \left(5 + \sqrt{24}\right)^{-1}$  (тогда  $x = -2$ ). Ответ:  $\pm 2$ .

**188а)** При решении уравнения  $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1$  надо рассмотреть два случая.

а)  $|x-3| = 1$ , тогда  $x-3 = \pm 1$  и  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = 2$ . Очевидно, что если  $|x-3| = 1$ , то число 1 в любой степени равно 1.

б)  $3x^2 - 10x + 3 = 0$ , тогда  $x_3 = \frac{1}{3}$  и  $x_4 = 3$ . Проверим эти решения подстановкой. При  $x = \frac{1}{3}$  получаем:  $\left|\frac{1}{3} - 3\right|^0 = \left(2\frac{2}{3}\right)^0 = 1$  — верное равенство. При  $x = 3$  имеем:  $|3-3|^0 = 0^0$  — это выражение не имеет смысла.

Ответ: 4; 2;  $\frac{1}{3}$ .

**191а)** В неравенстве  $2^x + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}$  раскроем знак модуля, рассмотрев два случая.

а) Если  $x \geq 0$ , то  $|x| = x$  и получаем неравенство  $2^x + 2^x \geq 2\sqrt{2}$  или  $2^x \geq \sqrt{2}$ , откуда  $x \geq \frac{1}{2}$ .

б) Если  $x < 0$ , то  $|x| = -x$  и имеем неравенство  $2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2}$ . Введем новую неизвестную  $t = 2^x$  и получим неравенство  $t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{2}$  или  $t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 \geq 0$  (учтено, что  $t > 0$ ). Решение этого неравенства  $t \in (-\infty; \sqrt{2} - 1] \cup [\sqrt{2} + 1; \infty)$ . Вернемся к старой неиз-

вестной  $x$ . Имеем неравенства  $2^x \leq \sqrt{2} - 1$  (откуда  $x \leq \log_2(\sqrt{2} - 1)$ ) и  $2^x \geq \sqrt{2} + 1$  (тогда  $x \geq \log_2(\sqrt{2} + 1)$ ). Но так как  $\log_2(\sqrt{2} + 1) > 0$ , то решение  $x \geq \log_2(\sqrt{2} + 1)$  в рассматриваемый промежуток  $x < 0$  не входит.

Объединяя полученные решения в этих случаях  $x \geq \frac{1}{2}$  и  $x \leq \log_2(\sqrt{2} - 1)$ , найдем окончательное решение данного неравенства  $x \in (-\infty; \log_2(\sqrt{2} - 1)] \cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$ .

Ответ:  $(-\infty; \log_2(\sqrt{2} - 1)] \cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$ .

194в) Для решения системы уравнений 
$$\begin{cases} 2^{\cos x} + 2^{\frac{1}{\cos y}} = 5 \\ 2^{\cos x + \frac{1}{\cos y}} = 4 \end{cases}$$
 сначала

да решим второе уравнение. Получаем  $\cos x + \frac{1}{\cos y} = 2$ , откуда  $\frac{1}{\cos y} = 2 - \cos x$ . Подставим это равенство в первое уравнение:  $2^{\cos x} + 2^{2 - \cos x} = 5$  или  $2^{\cos x} + \frac{4}{2^{\cos x}} = 5$ . Введем новую неизвестную  $t = 2^{\cos x}$  и получим уравнение:  $t + \frac{4}{t} = 5$  или  $t^2 - 5t + 4 = 0$ , корни которого  $t_1 = 1$  и  $t_2 = 4$ . Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем:  $2^{\cos x} = 1$  (тогда  $\cos x = 0$  и  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $\cos y = \frac{1}{2 - \cos x} = \frac{1}{2}$  и  $y = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ ) и  $2^{\cos x} = 4$  (тогда  $\cos x = 2$  и это уравнение решений не имеет).

Ответ:  $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ .

197а) ОДЗ уравнения  $\lg(\operatorname{arctg} x) + \lg(\operatorname{arcctg} x) = a$  задается условиями:  $\operatorname{arctg} x > 0$  и  $\operatorname{arcctg} x > 0$ . Первое неравенство выполнено при  $x > 0$ , второе — при всех  $x$ . Поэтому ОДЗ:  $x > 0$ . Используем свойства логарифмов и учтем, что  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$ . Имеем уравнение:  $\lg(\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x) = a$ , тогда  $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x = 10^a$  или  $\operatorname{arctg} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = 10^a$ . Введем новую неизвестную  $t = \operatorname{arctg} x$  и получим уравнение:  $t\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 10^a$  или  $0 = t^2 - \frac{\pi}{2}t + 10^a$ . Дискриминант этого квадратного уравнения  $D = \frac{\pi^2}{4} - 4 \cdot 10^a \geq 0$ , от-

куда  $\frac{\pi^2}{16} \geq 10^a$ , тогда  $\lg \frac{\pi^2}{16} \geq a$  или  $a \leq 2 \lg \frac{\pi}{4}$ . Корни уравнения

$$t = \frac{\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 4 \cdot 10^a}}{2} = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 16 \cdot 10^a}}{4}.$$

Легко проверить, что эти корни положительные. Вернемся к старой неизвестной  $x$ . Имеем урав-

нение:  $\arctg x = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 16 \cdot 10^a}}{4}$ , откуда  $x_{1,2} = \tg \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 16 \cdot 10^a}}{4}$ .

Ответ: при  $a \in \left(-\infty; 2 \lg \frac{\pi}{4}\right]$   $x_{1,2} = \tg \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 16 \cdot 10^a}}{4}$ , при  $a \in \left(2 \lg \frac{\pi}{4}; \infty\right)$   $x \in \emptyset$ .

**201а)** Неравенство  $\log_2(1 + \log_{\frac{1}{9}} x - \log_9 x) < 1$  запишем в виде  $\log_2(1 - 2\log_9 x) < \log_2 2$ . ОДЗ неравенства задается условием  $0 < 1 - 2\log_9 x$ . Решение неравенства приводит к неравенству  $1 - 2\log_9 x < 2$ . Итак, данное неравенство эквивалентно двойному неравенству  $0 < 1 - 2\log_9 x < 2$ . Из всех частей вычтем число 1:  $-1 < -2\log_9 x < 1$ . Разделим все части неравенства на отрицательное число  $(-2)$ . Знак неравенства меняется на противоположный:

$$\frac{1}{2} > \log_9 x > -\frac{1}{2}. \text{ Запишем неравенство в виде: } \log_9 9^{\frac{1}{2}} > \log_9 x > \log_9 9^{-\frac{1}{2}} \text{ или } \log_9 3 > \log_9 x > \log_9 \frac{1}{3}, \text{ откуда } 3 > x > \frac{1}{3}.$$

Ответ:  $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$ .

**203а)** ОДЗ неравенства  $\log_{x-3}(x-4) < 2$  задается условиями:  $x-4 > 0$ ,  $x-3 > 0$ ,  $x-3 \neq 1$ , решение которых дает  $x > 4$ . Данное неравенство запишем в виде  $\log_{x-3}(x-4) < \log_{x-3}(x-3)^2$ . Так как при  $x > 4$  основание логарифмов  $x-3 > 1$  (логарифмическая функция возрастающая), то логарифмируемые величины связаны неравенством того же знака. Получаем:  $x-4 < (x-3)^2$  или  $x-4 < x^2 - 6x + 9$  или  $0 < x^2 - 7x + 13$ . Это неравенство выполнено при всех  $x$ . Поэтому ОДЗ неравенства является и его решением  $x \in (4; \infty)$ .

Ответ:  $(4; \infty)$ .

**205а)** Используя определение логарифма запишем систему

$$\begin{cases} \log_x y = 2 \\ \log_{x+1}(y+23) = 3 \end{cases} \text{ в виде } \begin{cases} y = x^2 \\ y+23 = (x+1)^3 \end{cases}.$$

Подставим первое уравнение во второе:  $x^2 + 23 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  или  $0 = x^3 + 2x^2 + 3x - 22$ . Разложим правую часть этого кубического уравнения на множители  $(x-2)(x^2 + 4x + 11) = 0$ . Произведение множителей

равно нулю, если один из них равен нулю. Имеем уравнения:  $x - 2 = 0$  (тогда  $x = 2$ ) и  $x^2 + 4x + 11 = 0$  (корней нет, т.к. дискриминант отрицательный). Найдем  $y = x^2 = 2^2 = 4$ . Система имеет единственное решение (2; 4). Ответ: (2; 4).

### § 4. Начала анализа

**214а)** Функции синус и арксинус являются взаимнообратными, поэтому выполняется равенство  $\sin(\arcsin x) = x$ . Найдем производную от обеих частей равенства  $\cos(\arcsin x) \cdot (\arcsin x)' = 1$ , тогда

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$ . Теперь надо найти  $\cos(\arcsin x)$ . Пусть

угол  $\varphi = \arcsin x$ , тогда по определению функции арксинус выполнены два условия:  $\sin \varphi = x$  и  $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . Найдем  $\cos(\arcsin x) =$

$= \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - x^2}$  (учтено, что  $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  и  $\cos \varphi \geq 0$ ).

Тогда  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ . Ответ: доказано.

**215а)** Функцию  $y = x^x$  запишем в виде  $y = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$ . Найдем производную этой показательной функции  $y' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \times$

$\times (x \ln x)' = x^x \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x (\ln x + 1)$ . Ответ:  $x^x (\ln x + 1)$ .

**221а)** Функция  $f(x) = \frac{a^2 - 1}{3} x^3 + (a - 1)x^2 + 2x + 5$  определена на  $R$ . Найдем производную  $f'(x) = (a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2$ . Функция  $f(x)$  возрастает на  $R$  по условию. Поэтому при всех  $x$  должно выполняться неравенство  $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0$ . Так как старший коэффициент многочлена зависит от  $a$ , то надо рассмотреть два случая.

а)  $a^2 - 1 = 0$ , т.е.  $a = \pm 1$ . При  $a = 1$  имеем неравенство  $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 2 > 0$ , которое выполнено при всех  $x$ . Для  $a = -1$  получаем неравенство  $0 \cdot x^2 - 4x + 2 > 0$ , которое выполнено только при  $x < \frac{1}{2}$ . Поэтому такое значение  $a = -1$  не подходит.

б)  $a^2 - 1 \neq 0$ , т.е.  $a \neq \pm 1$ . Квадратное неравенство  $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0$  выполняется при всех  $x$ , если:

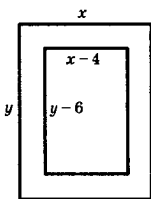
$$\begin{cases} a^2 - 1 > 0 \\ D = 4(a - 1)^2 - 8(a^2 - 1) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (a + 1)(a - 1) > 0 \\ (a - 1)(-a - 3) < 0 \end{cases}$$

или  $\begin{cases} (a+1)(a-1) > 0 \\ (a-1)(a+3) > 0 \end{cases}$ . Решение этой системы  $a \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$ .

Объединяя полученные решения, получим  $a \in (-\infty; -3) \cup [1; \infty)$ .

Ответ:  $(-\infty; -3) \cup [1; \infty)$ .

**222а)** Уравнение  $\cos x = \frac{\pi}{2} - x$  запишем в виде  $\cos x + x = \frac{\pi}{2}$  и рассмотрим функцию  $f(x) = \cos x + x$ . Ее производная  $f'(x) = -\sin x + 1$ . Величина  $f'(x) \geq 0$  при всех  $x$ . Поэтому функция  $f(x)$  возрастает на  $R$  и каждое свое значение принимает только один раз. Следовательно, уравнение  $\cos x + x = \frac{\pi}{2}$  имеет единственное решение. Ответ: доказано.



**230)** Пусть страница имеет размеры  $x$  и  $y$  (см). Тогда текст занимает размеры  $x-4$  и  $y-6$  (см). Так как площадь текста  $384 \text{ см}^2$ , то получаем равенство  $(x-4)(y-6) = 384$ , откуда  $y-6 = \frac{384}{x-4}$  и  $y = \frac{384}{x-4} + 6 = \frac{6x+360}{x-4} = 6 \frac{x+60}{x-4}$ . Площадь страницы  $S = xy = 6x \frac{x+60}{x-4} = 6 \frac{x^2+60x}{x-4}$  должна быть наименьшей. Найдем производную

$$S' = 6 \frac{(2x+60)(x-4) - (x^2+60x) \cdot 1}{(x-4)^2} = 6 \frac{x^2-8x-240}{(x-4)^2}.$$

Приравняем производную нулю, тогда  $x^2-8x-240=0$ . Корни этого уравнения  $x_1 = -12$  и  $x_2 = 20$ . Легко проверить, что  $x = 20$  — точка минимума.

Найдем  $y = 6 \frac{x+60}{x-4} = 6 \frac{20+60}{20-4} = 6 \cdot 5 = 30$ .

Ответ: ширина страницы 20 см, длина — 30 см.

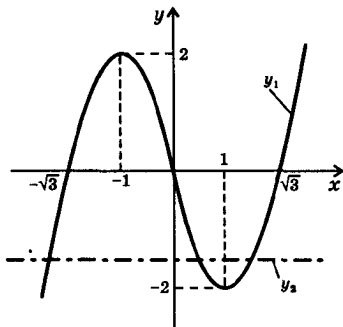
**223а)** Для сравнения чисел  $3^{\sqrt{2}}$  и  $2^{\sqrt{3}}$  сначала сравним их логарифмы по основанию 3, т.е.  $\sqrt{2}$  и  $\log_3 2^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \log_3 2$ . Оценим  $\log_3 2$ : очевидно, что  $\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{9}$ , тогда  $\log_3 8^{\frac{1}{3}} < \log_3 9^{\frac{1}{3}}$  или  $\log_3 2 < \frac{2}{3}$ . Умножим обе части этого неравенства на  $\sqrt{3}$  и получим

$\sqrt{3} \log_3 2 < \frac{2}{3} \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}} < \sqrt{2}$ . Таким образом, проведя ряд оценок, мы показали, что  $\sqrt{2} > \sqrt{3} \cdot \log_3 2$ . Тогда имеем:  $3^{\sqrt{2}} > 3^{\sqrt{3} \log_3 2}$  или  $3^{\sqrt{2}} > 2^{\sqrt{3}}$ , т.е. первое число больше. Ответ: первое число больше.

**235а)** Неравенство  $e^x > 1 + x$  запишем в виде  $e^x - x > 1$  и рассмотрим функцию  $f(x) = e^x - x$ . Найдем производную  $f'(x) = e^x - 1$ . При  $x > 0$  величина  $f'(x) > 0$ . Поэтому функция  $f(x)$  возрастает. Следовательно при  $x > 0$  имеем неравенство  $f(x) > f(0)$  или  $e^x - x > e^0 - 0$ , т.е.  $e^x - x > 1$ . **Ответ:** доказано.

**237а)** Исследуем уравнение  $x^3 - 3x = a$  графически. Построим график функции  $y_1 = x^3 - 3x$ . Найдем производную  $y'_1 = 3x^2 - 3$ . Критические точки функции  $y_1$  — точки  $x = \pm 1$ . Найдем значения  $y_1(\pm 1) = (\pm 1)^3 - 3(\pm 1) = \pm 2$ . Учтем, что функция  $y_1(x)$  нечетная. Графиком функции  $y_2 = a$  является прямая, параллельная оси абсцисс. Видно, что при  $|a| > 2$  есть одна точка пересечения графиков функций  $y_1$  и  $y_2$  (одно решение уравнения). При  $|a| = 2$  имеются две точки пересечения (два решения). Для  $|a| < 2$  есть три точки пересечения (три решения).

**Ответ:** при  $|a| > 2$  — одно решение, при  $|a| = 2$  — два решения, при  $|a| < 2$  — три решения.



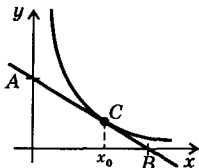
**242)** Прежде всего найдем точку пересечения графиков функций  $y = 8 - x$  и  $y = 4\sqrt{x + 4}$ . Получаем уравнение:  $8 - x = 4\sqrt{x + 4}$  или  $64 - 16x + x^2 = 16x + 64$  или  $x^2 - 32x = 0$ . Корни этого уравнения  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 32$  (не является корнем, т.к.  $8 - x \geq 0$ ). Угловым коэффициентом функции  $y = 8 - x$  равен  $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 = -1$  и угол наклона этой прямой к оси абсцисс  $\varphi_1 = 135^\circ$ .

Найдем угловым коэффициент  $k_2$  касательной к графику функции  $y = 4\sqrt{x + 4} = 4(x + 4)^{1/2}$ . Вычислим производную  $y' = 4 \cdot \frac{1}{2} (x + 4)^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{x + 4}}$ . При  $x = 0$  имеем  $k = \operatorname{tg} \varphi_2 = y'(0) = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$ . Поэтому угол наклона касательной  $\varphi_2 = 45^\circ$ . Разность углов наклона  $\varphi_1 - \varphi_2 = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ . Поэтому графики данных функций пересекаются под углом  $90^\circ$ . **Ответ:**  $90^\circ$ .

**243б)** Найдем производную функции  $f(x) = x^2 - 4x + 1$  и получим  $f'(x) = 2x - 4$ . Пусть касательная проведена в точке с абсциссой  $x_0$ . Запишем ее уравнение:  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  или  $y = (2x_0 - 4)(x - x_0) + x_0^2 - 4x_0 + 1$  или  $y = (2x_0 - 4)x - x_0^2 + 1$ . Известно, что касательная проходит через точку  $M(-1; -3)$ . Поэтому коор-

динаты этой точки удовлетворяют уравнению касательной:  $-3 = -(2x_0 - 4) - x_0^2 + 1$  или  $x_0^2 + 2x_0 - 8 = 0$ . Корни этого уравнения:  $x_0 = -4$  и  $x_0 = 2$ . Подставим такие значения в уравнение касательной. При  $x_0 = -4$  получаем:  $y = (2 \cdot (-4) - 4)x - (-4)^2 + 1$  или  $y = -12x - 15$ . Для  $x_0 = 2$  имеем:  $y = (2 \cdot 2 - 4)x - 2^2 + 1$  или  $y = -3$ .

Ответ:  $y = -12x - 15$  и  $y = -3$ .



**245)** Пусть к гиперболе  $y = \frac{a}{x}$  в точке с абсциссой  $x_0$  проведена касательная. Тогда

уравнение касательной:  $y = -\frac{a}{x_0^2}(x - x_0) + \frac{a}{x_0}$

или  $y = -\frac{a}{x_0^2}x + \frac{2a}{x_0}$ . Найдем точки пересечения этой прямой с осями координат. При

$x = 0$  получаем  $y = \frac{2a}{x_0}$ , поэтому координаты точки A  $\left(0; \frac{2a}{x_0}\right)$ . Для

$y = 0$  имеем линейное уравнение:  $-\frac{a}{x_0^2}x + \frac{2a}{x_0} = 0$ , откуда  $x = 2x_0$ .

Поэтому координаты точки B  $(2x_0, 0)$ . Найдем координаты середины отрезка AB:  $x = \frac{0 + 2x_0}{2} = x_0$  и  $y = \frac{\frac{2a}{x_0} + 0}{2} = \frac{a}{x_0}$ . Видно, что эти

координаты совпадают с координатами точки касания C  $\left(x_0; \frac{a}{x_0}\right)$ .

Следовательно, отрезок касательной к данной гиперболе, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам.

Ответ: доказано.

**248)** Так как парабола  $y = ax^2 + bx + 1$  проходит через точку A (1; 5), то координаты этой точки удовлетворяют уравнению параболы:  $5 = a + b + 1$ , откуда  $b = 4 - a$ . Тогда уравнение параболы имеет вид:  $y = ax^2 + (4 - a)x + 1$ . Производная этой функции  $y' = 2ax + 4 - a$ . Уравнение касательной в точке A (1; 5):  $y = (2a + 4 - a)(x - 1) + a + (4 - a) + 1$  или  $y = (a + 4)(x - 1) + 5$  или  $y = (a + 4)x + 1 - a$ . По условию уравнение касательной  $y = 7x - 2$ . Следовательно, угловые коэффициенты и свободные члены двух прямых должны быть одинаковыми, т.е.  $a + 4 = 7$  и  $1 - a = -2$ . Решение этих уравнений  $a = 3$ . Теперь найдем  $b = 4 - a = 4 - 3 = 1$ .

Ответ:  $a = 3, b = 1$ .

**252а)** Подберем первообразную для функции  $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ .

Предположим, что  $F(x) = a(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$ , где  $a$  и  $c$  — постоянные ве-

личины. Найдем  $F'(x) = a \cdot \frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x^2)' = a \cdot \frac{3}{2} \sqrt{1+x^2} \cdot 2x = 3ax\sqrt{1+x^2}$ . Так как  $F'(x) = f(x)$ , то получаем  $3a = 1$ , откуда  $a = \frac{1}{3}$ . Тогда первообразная имеет вид  $F(x) = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$ .

**Ответ:**  $F(x) = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$ .

**252в)** Запишем функцию  $f(x) = \operatorname{ctg} x$  в виде  $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ . Теперь подберем первообразную для функции  $f(x)$ . Получим  $F(x) = \ln \sin x + c$ . Найдем  $F'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$ . Видно, что  $F'(x) = f(x)$ . **Ответ:**  $F(x) = \ln \sin x + c$ .

**260)** Пусть  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — два решения уравнения  $x''(t) = -\omega^2 x(t)$ . Это означает, что справедливы равенства  $x_1'' = -\omega^2 x_1$  и  $x_2'' = -\omega^2 x_2$ . Рассмотрим функцию  $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ . Проверим, является ли эта функция решением данного уравнения, используя свойства производных:  $(x_1 - x_2)'' = x_1'' - x_2'' = -\omega^2 x_1 - (-\omega^2 x_2) = -\omega^2(x_1 - x_2)$ . Получили:  $(x_1 - x_2)'' = -\omega^2(x_1 - x_2)$ , т.е.  $x_1 - x_2$  также решение данного уравнения.

Теперь рассмотрим функцию  $x(t) = kx_1(t)$ . Имеем:  $(kx_1)'' = kx_1'' = k(-\omega^2 x_1) = -k\omega^2 x_1 = -\omega^2(kx_1)$ . Получили:  $(kx_1)'' = -\omega^2(kx_1)$ , т.е.  $kx_1$  также решение данного уравнения. **Ответ:** доказано.

**265)** Предположим, что первообразная для функций  $e^x \sin x$  и  $e^x \cos x$  имеет вид  $F(x) = e^x(a \sin x + b \cos x) + c$ , где  $a, b, c$  — некоторые постоянные. Найдем производную  $F' = (e^x)'(a \sin x + b \cos x) + e^x(a \sin x + b \cos x)' = e^x(a \sin x + b \cos x) + e^x(a \cos x - b \sin x) = e^x((a-b) \sin x + (a+b) \cos x)$ .

Для определения  $a$  и  $b$  сравним  $F'$  с функциями  $e^x \sin x$  и  $e^x \cos x$ . Чтобы  $F(x)$  была первообразной для функции  $e^x \sin x$ , надо выполнить условия:  $a - b = 1$  и  $a + b = 0$ . Решение этой системы  $a = \frac{1}{2}$  и  $b = -\frac{1}{2}$ . Поэтому первообразная для функции  $e^x \sin x$ :  $F(x) = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$ .

Чтобы  $F(x)$  была первообразной для функции  $e^x \cos x$ , надо выполнить условия:  $a - b = 0$  и  $a + b = 1$ . Решение этой системы  $a = b = \frac{1}{2}$ . Поэтому первообразная для функции  $e^x \cos x$ :  $F(x) = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c$ .

**Ответ:**  $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$ ;  $\frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c$ .

**272а)** Используем формулу понижения степени и вычислим

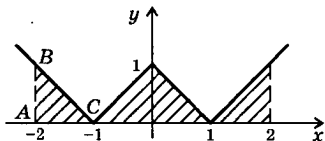
$$\begin{aligned} \text{интеграл: } \int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2nx) \, dx = \frac{1}{2} \left( x + \frac{\sin 2nx}{2n} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2} \left( 2\pi + \frac{\sin 4\pi n}{2n} \right) - \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{\sin 0}{2n} \right) = \pi. \quad \underline{\text{Ответ: } \pi.} \end{aligned}$$

**272г)** Преобразуем произведение функций в их сумму и вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin 3x \cos 5x \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\sin(3x - 5x) + \sin(3x + 5x)) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (-\sin 2x + \sin 8x) \, dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 8x}{8} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos 2\pi}{2} - \frac{\cos 8\pi}{8} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \left( \frac{\cos 0}{2} - \frac{\cos 0}{8} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = 0. \quad \underline{\text{Ответ: } 0.} \end{aligned}$$

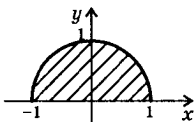
**273а)** Построим график функции  $y = ||x| - 1|$ . Тогда

$\int_{-2}^2 ||x| - 1| \, dx$  равен площади  $S$  заштрихованной фигуры. Как вид-



но из рисунка, эта площадь в 4 раза больше площади  $\triangle ABC$ , т.е.

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 2. \quad \underline{\text{Ответ: } 2.}$$

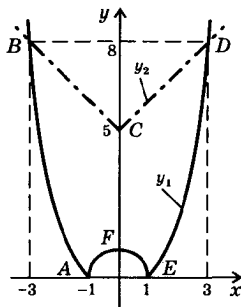


**273б)** Построим график функции  $y = \sqrt{1 - x^2}$ . Очевидно, что  $y \geq 0$ . Возведем это равенство в квадрат:  $y^2 = 1 - x^2$  или  $x^2 + y^2 = 1$  (уравнение окружности). Тогда графиком функции  $y = \sqrt{1 - x^2}$  является полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат. Тогда

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx \text{ равен площади } S \text{ полуокруга: } S = \frac{1}{2} \pi R^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ:  $\frac{\pi}{2}$ .

**276а)** Построим графики функций  $y_1 = |x^2 - 1|$  и  $y_2 = 5 + |x|$ . Графики функций  $y_1$  и  $y_2$  пересекаются в точках  $B(-3; 8)$  и  $D(3; 8)$ . Легко проверить, что искомая фигура  $ABCDEF$  симметрична относительно оси ординат. Поэтому сначала найдем площадь фигуры  $CDEF$ . Эта



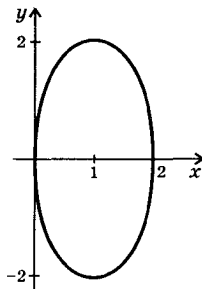
$$\begin{aligned} \text{площадь } S &= \int_0^1 (5 + x + x^2 - 1) dx + \\ &+ \int_1^3 (5 + x - x^2 + 1) dx = \int_0^1 (x^2 + x + 4) dx + \\ &+ \int_1^3 (-x^2 + x + 6) dx = \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x \right) \Big|_0^1 + \left( -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right) \Big|_1^3 = \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 4 \right) + \\ &+ \left( -\frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 18 \right) - \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 6 \right) = 4\frac{5}{6} + 13\frac{1}{2} - 6\frac{1}{6} = 12\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Было учтено, что при  $x \in [0; 3]$  функция  $y_2 = 5 + x$ , при  $x \in [0; 1]$  функция  $y_1 = 1 - x^2$ , а при  $x \in [1; 3]$  функция  $y_1 = x^2 - 1$ . Тогда искомая площадь  $S = 2 \cdot 12\frac{1}{6} = 24\frac{1}{3}$ . Ответ:  $24\frac{1}{3}$ .

**276б)** Построим фигуру, ограниченную линиями  $|y| = 2x - x^2$ . Эта фигура симметрична относительно оси абсцисс. Верхняя часть фигуры описывается функцией  $y = 2x - x^2$ . Тогда площадь искомой фигуры

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^2 (2x - x^2) dx = 2 \left( x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \\ &= 2 \left( 2^2 - \frac{2^3}{3} \right) = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ответ:  $2\frac{2}{3}$ .



# ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

## АЛГЕБРА (7—9 классы)

### I. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Для решения многих задач из различных разделов математики необходимо выполнять алгебраические преобразования. Цель этих преобразований — замена сложных и громоздких выражений более простыми и наглядными. Напомним основные приемы и способы преобразований.

#### Свойства степеней с действительными показателями

$$\begin{aligned}a^x \cdot a^y &= a^{x+y} & (a \cdot b)^x &= a^x \cdot b^x \\a^x : a^y &= a^{x-y} & \left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x} \\(a^x)^y &= a^{xy}\end{aligned}$$

#### Формулы сокращенного умножения

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\(a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

#### Нахождение корней многочлена

Многочлен одной переменной  $A = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  (где  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  — некоторые коэффициенты) легко разложить на множители, если известны все корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  этого многочлена, по формуле  $A = a_n (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$ .

#### Свойства модуля числа (выражения)

$$1) |a| \geq 0; 2) |-a| = |a|; 3) |a|^2 = a^2; 4) |ab| = |a| \cdot |b|; 5) \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$$

#### Корень $n$ -й степени и его свойства

Для любых  $a \geq 0, b \geq 0$ , натурального  $n$  ( $n \geq 2$ ) и целого  $k$  выполняются равенства:

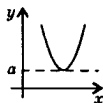
$$\begin{aligned}1) \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, & 4) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0); \\2) \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} &= \sqrt[nk]{a} \quad (k > 0); & 5) \sqrt[n]{a^k} &= \sqrt[nk]{a^k} \quad (k > 0). \\3) \sqrt[n]{a^k} &= (\sqrt[n]{a})^k;\end{aligned}$$

## II. ФУНКЦИИ И ЕЕ СВОЙСТВА

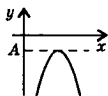
Пусть даны два множества действительных чисел  $X$  и  $Y$  и указан закон  $f$ , по которому каждому числу  $x \in X$  ставится в соответствие единственное число  $y \in Y$ . Тогда говорят, что задана функция  $y = f(x)$  или  $y(x)$  с областью определения (О.О.)  $X$  и областью изменения (О.И.)  $Y$ . При этом величину  $x$  называют независимой переменной (или аргументом функции), величину  $y$  — зависимой переменной (или значением функции).

Точка пересечения с осью  $Oy$  равна значению функции  $y(x)$  при  $x = 0$ , т.е.  $y(0)$ . Точки пересечения с осью  $Ox$  (их еще называют нулями функции) являются корнями уравнения  $y(x) = 0$ .

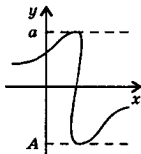
Функция называется *ограниченной снизу*, если все значения функции не меньше некоторого числа  $a$ , т.е.  $y(x) \geq a$ . Функция называется *ограниченной сверху*, если все значения функции не больше некоторого числа  $A$ , т.е.  $y(x) \leq A$ . Если функция ограничена и снизу и сверху, то она называется *ограниченной*.



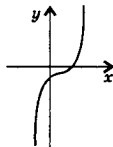
Ограничена  
снизу



Ограничена  
сверху



Ограничена



Не ограничена

**Монотонность** — возрастание или убывание функции. Функция называется *возрастающей*, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции (т.е. если  $x_2 > x_1$ , то  $y(x_2) > y(x_1)$ ). Функция называется *убывающей*, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции (т.е. если  $x_2 > x_1$ , то  $y(x_2) < y(x_1)$ ).

Область определения функции называется *симметричной*, если функция определена и в точке  $x_0$  и в точке  $(-x_0)$  (т.е. в точке симметричной точке  $x_0$  относительно начала числовой оси).

Функция называется *четной*, если при изменении знака аргумента, значение функции не меняется, т.е.  $y(-x) = y(x)$ . График четной функции всегда симметричен относительно оси ординат. Функция называется *нечетной*, если при изменении знака аргумента значение функции также меняется на противоположное, т.е.  $y(-x) = -y(x)$ .

Функция  $y = kx + b$  (где  $k$  и  $b$  — заданные числа) называется *линейной функцией*.

Функция  $y = ax^2 + bx + c$  (где  $a, b, c$  — числа,  $a \neq 0$ ) называется **квадратичной функцией**.

Пересечение графика квадратичной функции с осью абсцисс определяется знаком дискриминанта  $D = b^2 - 4ac$ : 1) если  $D > 0$ , то график пересекает ось  $Ox$  в двух точках; если  $D = 0$ , то график имеет только одну точку, принадлежащую оси  $Ox$ , т.е. касается оси абсцисс; если  $D < 0$ , то график не пересекает оси  $Ox$ .

Функция  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  (где  $a, b, c, d$  — некоторые числа,  $c \neq 0$ ) называется **дробно-линейной функцией**.

Функция  $y = ax^n$  (где  $a, n$  — некоторые числа;  $a \neq 0$ ;  $n$  — целое или рациональное число) называется **степенной**. Примеры:  $y = ax^2$  ( $n = 2$  — квадратичная функция, график — парабола),  $y = \frac{a}{x}$  ( $n = -1$ , обратная пропорциональная зависимость, график — гипербола).

### III. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Соотношение вида  $y(x) \vee 0$  (где  $y(x)$  — некоторая функция переменной  $x$ , а  $\vee$  — символ сравнения, который может совпадать с одним из пяти знаков:  $>, <, \geq, \leq, =$ ) называется **уравнением**, если символ  $\vee$  совпадает со знаком  $=$ , и **неравенством**, если символ  $\vee$  совпадает с одним из знаков:  $>, <, \geq, \leq$ . **Решением уравнения** или **неравенства**  $y(x) \vee 0$  называется любое значение  $x_0$ , при котором соотношение  $y(x) \vee 0$  является верным. Решить уравнение или неравенство означает найти все его решения или доказать, что решений нет. **Областью допустимых значений (ОДЗ)** уравнения или неравенства  $y(x) \vee 0$  называется область определения функции  $y(x)$ , т.е. те значения  $x$ , при которых выполнимы все операции с выражениями, входящими в функцию  $y(x)$ . Два уравнения (или неравенства) называются **эквивалентными** (или **равносильными**), если все их решения совпадают или они не имеют решений. Эквивалентность уравнений (неравенств) обозначают символом:  $\Leftrightarrow$ .

**Возможные преобразования**, которые приводят к **равносильному** уравнению (неравенству):

- 1) любой член уравнения (неравенства) можно перенести в другую часть, изменив знак этого члена на противоположный;
- 2) обе части уравнения можно умножить или разделить на любое число (или выражение), не равное нулю;
- 3) обе части неравенства можно умножить или разделить на любое положительное число (или выражение), знак неравенства при этом сохраняется;
- 4) обе части неравенства можно умножить или разделить на любое отрицательное число (или выражение), знак неравенства при этом меняется на противоположный.

### Уравнения

Уравнение вида  $ax + b = 0$  (где  $a$  и  $b$  — некоторые числа) называется **линейным уравнением** с переменной  $x$ .

Уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  (где  $a, b, c$  — числа;  $x$  — неизвестная) называется **квадратным**. Корни находятся по формулам:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ , где  $D = b^2 - 4ac$  — дискриминант. Если  $D > 0$ , то

уравнение имеет два корня ( $x_1 \neq x_2$ ); если  $D = 0$ , то  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ ;

если  $D < 0$ , то уравнение корней не имеет. Соотношения между корнями (формулы Виета):  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ,  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ .

## АЛГЕБРА (10—11 классы)

### I. ТРИГОНОМЕТРИЯ

Таблица 1

Аргумент $\alpha$	Функция			
	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$0^\circ = 0$	0	1	0	—
$30^\circ = \pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$45^\circ = \pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$60^\circ = \pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$90^\circ = \pi/2$	1	0	—	0

Таблица 2

Свойства функции $y(x)$	Функция $y(x)$			
	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
Область определения	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \in (-\infty; +\infty)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x \neq \pi n$
Область изменения	$y \in [-1; 1]$	$y \in [-1; 1]$	$y \in (-\infty; +\infty)$	$y \in (-\infty; +\infty)$
Ограниченность	ограничена	ограничена	не ограничена	не ограничена
Четность	нечетная $\sin(-x) = -\sin x$	четная $\cos(-x) = \cos x$	нечетная $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$	нечетная $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$
Периодичность	$T = 2\pi$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$	$T = 2\pi$ $\cos(x + 2\pi) = \cos x$	$T = \pi$ $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$	$T = \pi$ $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$
Нули функции ( $y = 0$ )	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

**Связь между функциями одного угла**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left( \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq \pi n)$$

**Функции суммы и разности углов**

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$$

**Преобразование суммы функций в произведение**

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

**Функции кратных углов (формулы двойных углов)**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

**Обратные тригонометрические функции**

Функция	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arccctg} x$
Определение	1) $\sin y = x$	1) $\cos y = x$	1) $\operatorname{tg} y = x$	1) $\operatorname{ctg} y = x$
	2) $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	2) $y \in [0; \pi]$	2) $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	2) $y \in [0; \pi]$

**Тригонометрические уравнения**

$$\sin x = a \quad x = (-1)^k \arcsin a + \pi k \quad (|a| \leq 1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = a \quad x = \pm \arccos a + 2\pi k \quad (|a| \leq 1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = a \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = a \quad x = \operatorname{arccctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

**II. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА****Основные свойства логарифмов**

Для положительных  $M, N$ ;  $a > 0, a \neq 1, b < 0, b \neq 1$  и действительных  $\alpha$ :

- 1)  $a^{\log_a M} = M$  — основное логарифмическое тождество;
- 2)  $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$ ;

$$3) \log_a \left( \frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N;$$

$$4) \log_a M^\alpha = \alpha \log_a M;$$

$$5) \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a} \quad \text{— переход к новому основанию.}$$

Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

$$1) \text{ Если } a^{f(x)} = a^{g(x)}, \text{ то } f(x) = g(x).$$

$$2) \text{ Если } \log_a f(x) = \log_a g(x), \text{ то } f(x) = g(x).$$

$$3) \text{ Если } a^{f(x)} > a^{g(x)}, \begin{cases} f(x) < g(x), & \text{если } 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x), & \text{если } a > 1 \end{cases}$$

$$4) \log_a f(x) > \log_a g(x), \text{ то } \begin{cases} f(x) < g(x), & \text{если } 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x), & \text{если } a > 1 \end{cases}$$

## НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

### I. Производная

#### Правила вычисления производных

$$1) (f + g)' = f' + g'; \quad 2) (cf)' = cf' \quad (\text{где } c \text{ — постоянная});$$

$$3) (f \cdot g)' = f'g + fg'; \quad 4) \left( \frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2};$$

$$5) f'(g(x)) = f'_g(g) \cdot g'_x(x) \quad (\text{производная сложной функции}).$$

### II. Первообразная и интеграл

#### Правила вычисления первообразных

$$1) \text{ Если } F(x) \text{ — первообразная для функции } f(x), G(x) \text{ — первообразная для функции } g(x), \text{ то } F(x) + G(x) \text{ — первообразная для функции } f(x) + g(x).$$

$$2) \text{ Если } F(x) \text{ — первообразная для функции } f(x) \text{ и } c \text{ — постоянная, то } cF(x) \text{ — первообразная для функции } cf(x).$$

$$3) \text{ Если } F(x) \text{ — первообразная для функции } f(x) \text{ и } k, b \text{ — постоянные, причем } k \neq 0, \text{ то } \frac{1}{k} F(kx + b) \text{ — первообразная для функции } f(kx + b).$$

#### Первообразные основных функций

Функция $f(x)$	$c$	$x^n$	$\frac{1}{k}$	$a^x$	$e^x$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
Первообразная $F(x)$	$cx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln  x $	$\frac{a^x}{\ln a}$	$e^x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$

**ГЕОМЕТРИЯ (СТЕРЕОМЕТРИЯ)****Многогранники****Призма**

Площадь боковой поверхности  $S = P_1 \cdot l$  ( $P_1$  — периметр перпендикулярного сечения,  $l$  — длина бокового ребра).

Объем  $V = S_1 \cdot l$  ( $S_1$  — площадь перпендикулярного сечения);  
 $V = S \cdot h$  ( $S$  — площадь основания,  $h$  — высота призмы)

**Пирамида. Усеченная пирамида**

Объем пирамиды  $V = \frac{1}{3} S \cdot h$  ( $S$  — площадь основания,  $h$  — высота пирамиды).

Объем усеченной пирамиды  $V = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$  ( $h$  — высота,  $S_1$  и  $S_2$  — площади оснований усеченной пирамиды).

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды  $S = \frac{1}{2} PH$   
 ( $P$  — периметр основания,  $H$  — апофема).

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды  
 $S = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) (P_1 \text{ и } P_2 \text{ — периметры оснований пирамиды}).$

**Круглые тела****Цилиндр**

Объем  $V = \pi R^2 h$  ( $R$  — радиус основания,  $h$  — высота цилиндра).

Площадь боковой поверхности  $S_6 = 2\pi Rh$ .

Площадь полной поверхности  $S_n = 2\pi Rh + 2\pi R^2$ .

**Конус**

Объем  $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$  ( $R$  — радиус основания,  $h$  — высота конуса).

Площадь боковой поверхности  $S_6 = \pi Rl$  ( $l$  — образующая конуса).

Площадь полной поверхности  $S_n = \pi Rl + \pi R^2$ .

**Усеченный конус**

Объем  $V = \frac{1}{3} \pi h (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)$  ( $h$  — высота,  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы оснований усеченного конуса).

Площадь боковой поверхности  $S_6 = \pi (R_1 + R_2) l$  ( $l$  — образующая усеченного конуса).

**Сфера. Шар**

Объем шара  $V = \frac{1}{3} \pi R^3$  ( $R$  — радиус шара).

Площадь сферы  $S = 4\pi R^2$  ( $R$  — радиус сферы).